

最优生产批量模型的理论 缺陷及其改进

邢如其, 崔笑, 李伟, 张如, 臧云

(石家庄铁道大学 经济管理学院, 河北 石家庄 050043)

摘要:应用单一产品最优生产批量模型进行决策, 只有生产的零部件储存时间满一年时, 才能得出正确的结果, 为了弥补这一缺陷, 应用函数极值法对该模型进行了改进。通过实例证明, 企业同一设备轮换生产多种产品时, 不存在共同最优批次, 进而提出根据单一最优生产批量模型, 解决同一设备轮换生产多种产品的最优安排方法。

关键词:最优生产批量; 理论缺陷; 模型改进

中图分类号:F406

文献标识码:A

一、引例

假设某公司全年生产甲零件, 已知全年生产量 36 000 个, 生产每批零件的调整成本 1 000 元, 全年平均储存成本 2 元/件年, 每天生产量 300 件, 每天发出(或领用)量 200 件, 企业将如何安排生产才能使总成本最低? 显然, 这是一个最优生产批量的决策问题。应用最优生产批量模型:

最优生产批量

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AS}{C(1-\frac{d}{q})}} \quad (1)$$

最优生产批量的全年总成本

$$TC = \sqrt{2ASC(1-\frac{d}{q})} \quad (2)$$

式中, A 为零部件(或产品)全年生产量; Q 为零部件(或产品)生产批量; TC 为最优生产批量的总成本; S 为生产每批零部件(或产品)的调整成本; C 为每个零部件(或产品)的全年平均储存成本; q 为零部件(或产品)的每天生产量; d 为零部件(或产品)的每天发出(领用)量。

可得最优生产批量 $Q^* \approx 10\,392$ 件, 最优生

产批次 $n = A \div Q = 36\,000 \div 10\,392 \approx 3.5$ 批, 最优生产批量的总成本 $TC \approx 6\,928$ 元。实际上, 这个结果是错误的, 可由下面的逐次测试得以证实(如表 1 所示)。

应用逐次测试法, 最优的经济批量、批次和最低成本分别为 14 697 件、2.5 批和 4 950 元, 而不是 10 392 件、3.5 批和 6 928 元。

为什么会出现这样错误的结论呢? 原因在于模型(1)、(2)隐含了一个假设。即一年的生产量与发出量之比为一年(一年按 360 天计, 下同), 如果实际情况不满足此假设, 就将导致错误的决策。

如果在上例中, 每天甲零件的发出量不是 200 件, 而是 100 件, 则应用模型(1)、(2)可得: 最优生产批次 $n = A \div Q = 36\,000 \div 7349 \approx 4.9$ 批, 最优生产批量的总成本 $TC \approx 9\,799$ 元。这个结果是正确的, 因为, 每天发出 100 件, 36 000 件正好是一年的发出量。这个结果和下面的逐次测试法得到结果一致, 如表 2 所示。

企业在实际的生产批量决策中, 一年的生产量与发出量之比恰好等于 360 的情况是不多见的, 这就需要对模型(1)、(2)进行修正^[1-2]。

收稿日期: 2011-10-23

基金项目: 铁道部基金项目(2010F012)

作者简介: 邢如其(1955—), 男, 教授, 研究方向: 经济与管理。

表 1 每天发出 200 件时的最优生产批量

批次 $n=\frac{A}{Q}$	批量/个 Q	调整成本/元 $S \times n$	平均储存量/个 $\frac{Q}{2}(1-\frac{d}{q})$	储存成本/元 $C^* \frac{Q}{2}(1-\frac{d}{q})$	总成本/元 TC
1	36 000	1 000	6 000	6 000	7 000
2	18 000	2 000	3 000	3 000	5 000
2.5	14 400	2 500	2 410	2 400	4 900
3	12 000	3 000	2 000	2 000	5 000
3.5	10 285	3 500	1 714	1 714	5 214
4	9 000	4 000	1 500	1 500	5 500
5	7 200	5 000	1 200	1 200	6 200
6	6 000	6 000	1 000	1 000	7 000

注:表 1 中的单位储存成本是按 1 元计算的。

表 2 每天发出 100 件时的最优生产批量

批次(次) $n=\frac{A}{Q}$	批量/个 Q	调整成本/元 $S \times n$	平均储存量/个 $\frac{Q}{2}(1-\frac{d}{q})$	储存成本/元 $C^* \frac{Q}{2}(1-\frac{d}{q})$	总成本/元 TC
1	36 000	1 000	12 000	24 000	25 000
2	18 000	2 000	6 000	12 000	14 000
3	12 000	3 000	4 000	8 000	11 000
4	9 000	4 000	3 000	6 000	10 000
4.9	7 349	4 900	2 450	4 899	9 799
5	7 200	5 000	2 400	4 800	9 800
6	6 000	6 000	2 000	4 000	10 000
8	4 500	8 000	1 500	3 000	11 000

二、单一产品经济生产批量模型改进

在每天发出 200 件时,表 1 中逐次测试的结果显示最优批量为 14 400 件,2.5 批,此时的成本为 4 900 元,而不是利用(1)、(2)式计算的 3.5 批。原因是每天发出 200 件,存储甲零件的最长时间是:36 000÷200=180 天,只有半年,存储成本就应当按半年计算,而不能按一年计算。也就是每个零件的储存成本 $C^* = 2 \div 360 \times 180 = 1$ 元/件。

在零部件存储时间不足一年的条件下,如果仍然应用类似(1)、(2)形式的模型,需要对其进行改进^[3],只需将单位储存成本 C 假设一年改为平均每天储存成本不受生产数量与发出量之比必须为 360 的限制。此时:

调整成本=每次调整成本×调整次数,即

$$TC_T = S \frac{A}{Q} \quad (3)$$

储存成本=单位储存成本×平均储存量×储存天数×批次,即

$$TC_C = C \frac{Q(q-d)}{2q} \left[\frac{Q}{q} + \frac{Q(q-d)}{qd} \right] \frac{A}{Q} \quad (4)$$

(4)中, $\frac{Q}{q}$ 为每批次的生产天数, $\frac{Q(q-d)}{qd}$ 为每批次的纯发出天数。

总成本=调整成本+储存成本

$$TC = \frac{A}{Q}S + C \frac{Q(q-d)}{2q} \left[\frac{Q}{q} + \frac{Q(q-d)}{qd} \right] \frac{A}{Q} \\ = \frac{A}{Q}S + \frac{Q(q-d)}{2qd}CA \quad (5)$$

根据总成本 TC 最小的必要条件

$$\frac{dTC}{dQ} = -\frac{A}{Q^2}S + \frac{(q-d)}{2qd}CA = 0 \quad (6)$$

可得,经济生产批量为

$$Q^* = \sqrt{\frac{2qdS}{C(q-d)}} \quad (7)$$

由 Q^* 代入(5)可得

$$TC^* = A \sqrt{\frac{2SC(q-d)}{qd}} \quad (8)$$

仍然沿用 M 公司生产甲零件的数据,如果每天发出量为 100 件,则:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2qdS}{C(q-d)}} = \sqrt{\frac{2 \times 300 \times 100 \times 1\,000}{2/360 \times (300-100)}} \\ = 7\,349(\text{件})$$

$$TC^* = A \sqrt{\frac{2SC(q-d)}{qd}} = 36\,000 \times \\ \sqrt{\frac{2 \times 1\,000 \times 2/360 \times (300-100)}{300 \times 100}} \\ \approx 9\,798(\text{元})$$

计算结果与原来的计算结果表 2 逐次测试结果一致。

如果每天发出量不是 100 件,而是 200 件,则:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2qdS}{C(q-d)}} = \sqrt{\frac{2 \times 300 \times 200 \times 1\,000}{2/360 \times (300-200)}} \\ = 14\,697(\text{件})$$

$$TC^* = A \sqrt{\frac{2SC(q-d)}{qd}} = 36\,000 \times \\ \sqrt{\frac{2 \times 1\,000 \times 2/360 \times (300-200)}{300 \times 200}} \approx 4\,898(\text{元})$$

表 3 N 企业生产甲、乙两种产品有关数据资料

序号 i	零件	$A_i/\text{件}$	$C_i/(\text{元}/\text{年})$	$S_i/\text{元}$	$q_i/\text{件}$	$d_i/\text{件}$
1	甲	1 200	18	600	30	10
2	乙	2 400	7.2	320	20	10

根据表 3 资料和(9)得:

$$\text{共同最优生产批次 } N^* = \sqrt{\frac{\sum A_i C_i (1 - \frac{d}{q})}{2 \sum S_i}} = \\ \sqrt{\frac{1\,200 \times 18 \times (1 - \frac{10}{30}) + 2\,400 \times 7.2 \times (1 - \frac{10}{20})}{2 \times (600 + 320)}} \\ = 3.539(\text{批})$$

由此可得:

$$Q_{\text{甲}}^* = \frac{1\,200}{3.539} = 339(\text{件}),$$

$$Q_{\text{乙}}^* = \frac{2\,400}{3.539} = 678(\text{件})$$

根据(2)得:

$$TC_{\text{甲}} = 4\,157(\text{元}), TC_{\text{乙}} = 2\,351.5(\text{元});$$

总的成本

$$TC_{\text{总}} = TC_{\text{甲}} + TC_{\text{乙}} = 6\,508.5(\text{元})$$

而根据(7)、(8)可得:

计算结果与原来的计算结果并不相同,但却与表 1 逐次测试的结果一致(表 1 中 2.5 批时的最低成本为 4 950 元,和 4 898 相差 52 元,是由于最优批次为一位小数所致)。也就是说,(7)、(8)才是不受每天发出数量限制的最有生产经济批量的决策模型。

三、多品种产品经济生产批量的确定

当企业用同一种生产设备轮换分批生产多种产品或零部件时,有人主张采用共同最优生产批次模型来确定生产批量,此时的模型为

$$\text{共同最优生产批次 } N^* = \sqrt{\frac{\sum A_i C_i (1 - \frac{d}{q})}{2 \sum S_i}} \quad (9)$$

(9) 式中,各符号的含义与(1)、(2)中的含义相同。

实际上,由(9)所确定的共同最优批次并不能保证总成本最低,即不存在共同最优生产批次。比如,N 企业生产甲、乙两种产品,有关两种产品的数据如表 3 所示:

$$Q_{\text{甲}}^* = 600(\text{件}), TC_{\text{甲}} = 2\,400(\text{元}), n = 2(\text{批});$$

$$Q_{\text{乙}}^* = 800(\text{件}), TC_{\text{乙}} = 1\,920(\text{元}), n = 3(\text{批});$$

总的成本

$$TC_{\text{总}} = TC_{\text{甲}} + TC_{\text{乙}} = 2\,400 + 1\,920 = 4\,320$$

(元)。

由此可知,应用共同最优生产批次所得结果,较之应用(7)、(8)要多花费成本 2 188.5(6 508.5 - 4 320 = 2 188.5)元。也就是说,应用(9)所确定的“共同最优生产批次”的计算公式,不能实现多种产品在同一设备轮换生产的最优,也就是不存在多种产品的“共同最优生产批次”。只能应用(7)、(8)确定每种产品的最优批量和批次后,再统筹安排轮换生产才能实现最优。这个论断可以根据证明(5)、(6)的原理,并应用解析法得到证明。

$$TC_{\text{总}} = \sum (\frac{A_i}{Q_i} S_i + \frac{Q_i (q_i - d_i)}{2 q_i d_i} C_i A_i) \quad (10)$$

由于(10)中各产品的批量 Q_i 和 Q_j 没有相乘

的关系,当 $TC_{\text{总}}$ 对 Q_i 求偏导时,任意的 $Q_j (i \neq j)$ 均为常量。所以:

$$\frac{\partial TC_{\text{总}}}{\partial Q_i} = -\frac{A_i}{Q_i^2} S_i + \frac{(q_i - d_i)}{2q_i d_i} C_i A_i = 0 \quad (11)$$

由(11)很容易地即可得到(5)、(6),进而得到(7)、(8)。

参考文献:

- [1]代颖,马祖军.制造/再制造混合系统的最优生产批量模型[J].西南交通大学学报,2006(1):116-120. (4):41.
[2]王岳野.最优生产批量的决策分析[J].会计之友,2005 [3]刘升阳.《管理会计学》教学改革及实践教学浅析[J].学理论,2011(12):338-339.

Theoretical Drawbacks in Model of Single Product Optimal Lot and Improvement

XING Ru-qi, CUI Xiao, LI Wei, ZHANG Ru, ZANG Yun

(School of Economics and Management, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: the model of single product optimal production lot described in general literature can draw the correct conclusion only when the storage of product is more than one year. Otherwise, wrong decisions will appear. In order to overcome the defects of the model, we employ the method of function extremum to modify it. According to the experience, there is no common lot size when different kinds of products are manufactured in turns by the same equipment. In this condition, we put forward the model of single optimal production lot to optimize the institutional arrangements.

Key words: optimal model of production lot; defects; model improvement

(责任编辑 田丽红)

欢迎订阅《石家庄铁道大学学报(社科科学版)》

《石家庄铁道大学学报(社科科学版)》是河北省教育厅主管、石家庄铁道大学主办的国内外公开发行人文社科类综合性学术期刊。2007年8月创刊,原名为《石家庄铁道学院学报(社科科学版)》,2010年8月更为现名。主要刊登经济与管理、语言与文学、哲学、法学、建筑与艺术学、高等教育等方面的学术论文。主要读者对象为高校相关专业的教师和研究生,以及相关的科研人员。连续出版物号为:ISSN 2095-0365、CN13-1402/C。季刊,每季度末出版。112页/期,定价10.00元/册。全年共40元。欢迎订阅。编辑部自办发行,免费邮寄。订户可直接与编辑部联系。

通信地址:050043 河北省石家庄市北二环东路17号 石家庄铁道大学学报编辑部 收件人:石家庄铁道大学学报编辑部

联系电话:0311-87936095

电子信箱:xuebaoskb@163.com

本刊网站 <http://xuebao.stdu.deu.cn>

石家庄铁道大学学报编辑部