2020年6月 Journal of Shijiazhuang Tiedao University(Natural Science Edition)

Jun. 2020

一维对流弥散方程的 显式差分法求解及其收敛性分析

张力霆, 蒋振中, 张少雄, 齐清兰

(石家庄铁道大学 土木工程学院,河北 石家庄 050043)

摘要:对一维对流弥散方程的特点进行全面分析,在稳定渗流场中,认为差分格式中的流速项系数和弥散系数是随空间节点的位置而改变的,给出了不同渗流方向下相应的差分格式,推导了对应的收敛条件,并考虑了边界浓度衰减的影响,引入边界衰减因子,最后将该方法运用到实际工况中。从计算结果中发现,在满足收敛条件的情况下,能够计算出浓度在时间和空间的变化数值,最终计算结果是收敛的,而不满足相应的收敛条件时,其计算结果是不收敛的。所介绍的方法能够求解一维对流弥散方程的解析解,简单实用,且能够方便了解每一迭代步内的浓度空间分布情况。

关键词:对流弥散方程;显式差分法;收敛条件;正向渗流;逆向渗流;边界衰减因子中图分类号: P641.2 文献标志码: A 文章编号: 2095-0373(2020)02-0001-07

1 研究背景

在滨海及海岛地区,由于地下水的超量开采,海水入侵已经成为沿海地区普遍面临的重大地质灾害之一。自20世纪70年代以来,国内外对海水入侵进行了大量研究并取得很大进展,其中数学模型的研究是其中的重要方面之一,而对流弥散模型能够较好地模拟和解释海水入侵问题[1]。研究一维对流弥散方程是研究海水入侵的重要方法,能够粗略地模拟出海水入侵情况,相比较二维和三维所需要的参数较少,是一种简易可行的方法。杨金忠[2]对各种求解对流弥散方程数值方法比较,认为对于一维问题,有限差分法能够得到精确结果,因此本文提出利用显式有限差分法对一维对流弥散模型进行求解,具有操作简单、稳定性和收敛性好的特点,是求解一维对流弥散模型的有效方法。

有限差分法是一种古典的数值计算方法。随着数值计算方法的研究和发展,差分法已经被广泛应用在地下水渗流问题和浓度扩散问题中。其基本思想是:用渗流区内有限个离散点的集合代替连续的渗流区,在这些离散点上用差商近似地代替微商,将微分方程及其定解条件化为以未知函数在离散点上的近似值为未知量的代数方程(称为差分方程),然后求解差分方程,从而得到微分方程的解在离散点上的近似值。有限差分法难免会产生截断误差、舍入误差和测量误差,如果在某个节点某个时阶处出现误差后,会对下一步的迭代求解过程产生影响,是误差逐渐变小还是被无限放大,需要讨论差分法的收敛性和稳定性[3-4]。

夏源等^[5]提出分数阶对流弥散方程的数值求解方法,杨淑伶^[6]提出求解分数阶对流弥散方程的边界值法。传统研究对流弥散方程的数值求解时,往往将纵向弥散系数看做常数,而事实上纵向弥散系数与流速的大小成正比,当流速在空间的分布不相等时,流速和纵向弥散系数均不能看做常数。在研究对流弥散方程的差分法求解时,在不同渗流方向下,流速会与盐分迁移的方向相同或相反,代入到差分式当中会有正负号的影响,而弥散系数只与流速的大小有关,为保证迭代式中的流速项系数为正值,在不同的渗

收稿日期:2019-01-13 责任编辑:车轩玉 DOI,10. 13319/j. cnki. sjztddxxbzrb. 20190007

作者简介:张力霆(1962-),男,博士,教授,研究方向为岩土工程、尾矿库工程。E-mail;zhanglt0709@sina.com

张力霆, 蒋振中, 张少雄, 等. 一维对流弥散方程的显式差分法求解及其收敛性分析[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2020, 33(2): 1-7.

流方向下,对流弥散方程会出现2种差分迭代式,这是以往研究没有考虑到的。

当利用有限差分法求解一维对流弥散方程时,需要考虑边界条件的问题,李新洁等^[7]采用 Dirichlet 零边值边界条件求解对流弥散方程。本文引人边界衰减因子来解释盐分在边界处存在稀释和衰减的情况,并讨论在不同渗流方向下的影响,最后讨论了在不同渗流方向下给出不同的差分式,并给出了各自对应的收敛条件,在收敛条件下,利用显式差分法求解对流弥散方程是收敛的。

2 研究方法

2.1 一维对流弥散方程

以一维对流弥散方程为研究对象,不计源汇项,且孔隙率 n 为常数,在稳定渗流场中,若求解对流弥散方程得出溶质浓度变化引起的水密度变化可以忽略,则水流方程和溶质迁移方程可以独立求解。由水流方程的解得出研究区域及时段的速度分量,然后把速度作为输入代入对流弥散方程。这种"去耦"法计算效率高[8]。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_t \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (V_x c) \tag{1}$$

$$V_x = \frac{-k\partial h}{\partial x} \tag{2}$$

$$D_t = \alpha_L |V_x| + D^* \tag{3}$$

式中,k 为渗透系数; D_i 为弥散系数,为反映可溶性物质通过渗透介质时的弥散现象强弱的物理量; α_L 为 纵向弥散度; $D^* = \tau D_0$, τ 为孔隙介质的弯曲度,取值范围为 $0.5 \sim 0.01$, D_0 为开放水体的分子扩散系数,对于 NaCl 盐溶液经查表得 $D_0 = 1.48 \times 10^{-5}$ cm²/s^[9], τ 取 0.5,代入得到 $D^* = 7.4 \times 10^{-10}$ m²/s,其值太小可忽略不计。

$$D_t = \alpha_L |V_r| \tag{4}$$

2.2 划分网格

在海水入侵模型中,假设左侧海水高度为 h_0 ,右侧淡水水头为 h_N ,渗流区间[0,L]均匀分布N+1个节点,则空间步长 $\Delta=L/N$, $X_0=0$,节点号数x乘以空间步长 Δx 便是该节点距左侧海水边界的长度, $l_x=i\Delta(=1,2,\cdots,N)$,取时间步长为 Δt ,则 $t_n=n\Delta t$ $(n=1,2,\cdots,M)$ 。

2.3 微分方程的显式差分化

对于一维海水人侵对流弥散模型,存在 2 种类型,正向渗流类型是左侧海水水位高,右侧淡水水位低,即 $h_0 > h_N$,如图 1 所示,此时速度方向与盐分迁移的方向相同,且与 x 轴方向相同;逆向渗流类型是左侧海水水位低,右侧淡水水位高,即 $h_0 < h_N$,如图 2 所示,此时速度方向与盐分迁移的方向相反,与 x 轴方向相反。研究恒定流稳定状态下海水的扩散情况,故假设在海水扩散以前水头和流速已经达到稳定的渗流状态,图 1、图 2 所示表示在稳定的水头和流速情况下发生正向渗流和逆向渗流的情况。

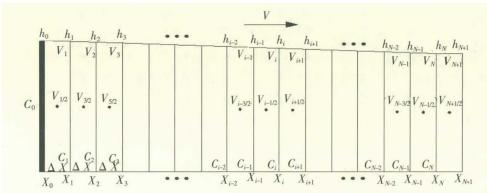


图 1 正向渗流类型的示意图

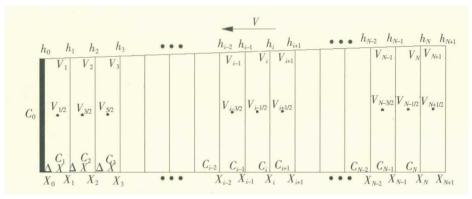


图 2 逆向渗流类型的示意图

在正向渗流的类型下,流速为正值,根据达西定律,待到稳定后, V_i 的值和 h_i 存在——对应关系,根据空间节点处流量相等的原理[10],可以求得稳定后的流速表达式为

$$V_{i} = \frac{k(h_{0}^{2} - h_{N}^{2})}{2L\sqrt{h_{0}^{2} - i\frac{(h_{0}^{2} - h_{N}^{2})\Delta x}{L}}}$$
(5)

$$V_{i+\frac{1}{2}} = \frac{k\left(\sqrt{h_0^2 - i\frac{(h_0^2 - h_N^2)\Delta x}{L}} - \sqrt{h_0^2 - (i+1)\frac{(h_0^2 - h_N^2)\Delta x}{L}}\right)}{\Delta x}$$
(6)

$$V_0 = \frac{k(h_0^2 - h_N^2)}{2Lh_0} \tag{7}$$

$$V_N = \frac{k(h_0^2 - h_N^2)}{2Lh_N} \tag{8}$$

将一维对流弥散方程式(1)差分化为

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_L \left[V_{i+\frac{1}{2}} (c_{i+1}^n - c_i^n) - V_{i-\frac{1}{2}} (c_i^n - c_{i-1}^n) \right]}{(\Delta x)^2} - \frac{V_i c_i^n - V_{i-1} c_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (1 \le i < N)$$

当 i=N 时,认为 $c_{N+1}^*=\beta c_N^*$, $V_{N+\frac{1}{2}}=V_N$,其中 β 为边界衰减因子,其值介于[0,1]之间,反映浓度在边界处的衰减程度, $\beta=1$ 时,代表边界处浓度没有衰减, $\beta=0$ 时,代表完全衰减(假如边界处存在盐分吸收器将盐分完全吸收,则代表完全衰减),其他情况介于没有衰减和完全衰减之间。

$$\frac{c_N^{n+1} - c_N^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_L \left[V_N (\beta - 1) c_N^n - V_{N-\frac{1}{2}} (c_N^n - c_{N-1}^n) \right]}{(\Delta x)^2} - \frac{V_N c_N^n - V_{N-1} c_{N-1}^n}{\Delta x}$$
(10)

对式(10)进行恒等变换有

$$c_{i}^{n+1} - c_{i}^{n} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^{2}} \left\{ \alpha_{L} \left[V_{i+\frac{1}{2}} \left(c_{i+1}^{n} - c_{i}^{n} \right) - V_{i-\frac{1}{2}} \left(c_{i}^{n} - c_{i-1}^{n} \right) \right] - \Delta x \left(V_{i} c_{i}^{n} - V_{i-1} c_{i-1}^{n} \right) \right\}$$

$$(11)$$

今

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \lambda \tag{12}$$

则可化简为

$$\begin{cases} c_i^{n+1} = \lambda \alpha_L V_{i+\frac{1}{2}} c_{i+1}^n \left[1 - \lambda (\alpha_L V_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_L V_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x V_i) \right] c_i^n + \lambda (\alpha_L V_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{i-1}) c_{i-1}^n & (1 \leq i < N) \\ c_N^{n+1} = \left\{ 1 - \lambda \left[\alpha_L (1 - \beta) V_N + \alpha_L V_{N-\frac{1}{2}} + \Delta x V_N \right] \right\} c_N^n + \lambda (\alpha_L V_{N-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{N-1}) c_{N-1}^n & (i = N) \end{cases}$$
(13)

式(13)代表一维对流弥散方程在正向渗流类型下的显式差分迭代公式。

在逆向渗流的情况下,代入流速的计算值为负值,考虑到弥散系数不随流速正负的影响而只与大小有关,为了保证代入的显式差分式中的流速项系数为正值,故将式(1)差分化为

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \frac{a_L \left[V_{i+\frac{1}{2}}'(c_{i+1}^n - c_i^n) - V_{i-\frac{1}{2}}'(c_i^n - c_{i-1}^n) \right]}{(\Delta x)^2} - \frac{V_i'c_i^n - V_{i-1}'c_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (1 \le i < N)$$

当 i = N 时,浓度的差分式与式(10)相同,且此时的速度表达式为

$$V_{i}' = \frac{k(h_{N}^{2} - h_{0}^{2})}{2L\sqrt{h_{N}^{2} - (N - i)\frac{(h_{N}^{2} - h_{0}^{2})\Delta x}{L}}}$$
(15)

$$V_{i+\frac{1}{2}}' = \frac{k\sqrt{h_N^2 - (N-i)\frac{(h_N^2 - h_0^2)\Delta x}{L}} - \sqrt{h_0^2 - (N-i+1)\frac{(h_N^2 - h_0^2)\Delta x}{L}}}{\Delta x}$$
(16)

同理化为标准的差分式为

$$\begin{cases} c_i^{n+1} = \lambda \alpha_L V_{i+\frac{1}{2}}' c_{i+1}^n \left[1 - \lambda (\alpha_L V_{i+\frac{1}{2}}' + \alpha_L V_{i-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_i) \right] c_i^n + \lambda (\alpha_L V_{i-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{i-1}') c_{i-1}^n & (1 \leqslant i \leqslant N) \\ c_N^{n+1} = \left\{ 1 - \lambda \left[\alpha_L (1 - \beta) V_N' + \alpha_L V_{N-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_N' \right] \right\} c_N^n + \lambda (\alpha_L V_{N-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{N-1}') c_{N-1}^n & (i = N) \end{cases}$$
式(17)代表—维对流弥散方程在逆向渗流类型下的显式差分迭代公式。

2.4 差分格式的收敛性判定

前面建立差分方程时,是用差商代替微商,在数值法中提出一种差分格式,需要了解其收敛性。 记

$$e_i^n = C_i^n - c_i^n \quad (i = 0, 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, M)$$
 (18)

式中, C_i^n 为偏微分方程定解问题在点(i,n)处的精确解; c_i^n 为有限差分方程问题在点(i,n)处的解; e_i^n 为偏微分方程定解问题精确解与有限差分方程问题的解在点(i,n)处的误差。

2.4.1 正向渗流类型的收敛条件

当为正向渗流类型时,左侧海水水位高于右侧淡水水位,根据式(10)得到

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + o(\Delta t) = \frac{\alpha_L \left[V_{i+\frac{1}{2}} \left(C_{i+1}^n - C_i^n \right) - V_{i-\frac{1}{2}} \left(C_i^n - C_{i-1}^n \right) \right]}{(\Delta x)^2} - \frac{V_i C_i^n - V_{i-1} C_{i-1}^n}{\Delta x} + o(\Delta x)$$
(19)

令

$$Z_i^n = \Delta t [o(\Delta t) + o(\Delta x)]$$
 (20)

有

$$\begin{cases} e_{i}^{n+1} = \lambda \alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}} e_{i+1}^{n} \left[1 - \lambda (\alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{i}) \right] e_{i}^{n} + \lambda (\alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{i-1}) e_{i-1}^{n} + Z_{N}^{n} \quad (1 \leq i \leq N) \\ e_{N}^{n+1} = \left\{ 1 - \lambda \left[\alpha_{L} (1 - \beta) V_{N} + \alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{N} \right] \right\} e_{N}^{n} + \lambda (\alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{N-1}) e_{N-1}^{n} + Z_{N}^{n} \quad (i = N) \end{cases}$$

$$(21)$$

当满足

$$1 - \lambda (\alpha_L V_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_L V_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x V_i) \geqslant 0$$

$$(22)$$

根据绝对值不等式有

$$\begin{cases}
|e_{i}^{n+1}| = \lambda \alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}} |e_{i+1}^{n}| \left[1 - \lambda (\alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{i}) \right] |e_{i}^{n}| + \lambda (\alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{i-1}) |e_{i-1}^{n}| + |Z_{i}^{n}| & (1 \leq i \leq N) \\
|e_{N}^{n+1}| = \left\{ 1 - \lambda \left[\alpha_{L} (1 - \beta) V_{N} + \alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{N} \right] \right\} |e_{N}^{n}| + \lambda (\alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}} + \Delta x V_{N-1}) |e_{N-1}^{n}| + |Z_{N}^{n}| & (i = N)
\end{cases}$$
(23)

记 e_{\max}^n 和 Z_{\max}^n 分别是 $|e_i^n|$ 和 $|Z_i^n|$ $(i=0,1,\cdots,N)$ 的最大值,即 $e_{\max}^n = \max_{1 \le i \le N-1} \{|e_i^n|\}$ 和 $Z_{\max}^n = \max_{1 \le i \le N-1} \{|Z_i^n|\}$ 。 当 $i=0,1,\cdots,N-1$ 时,化简得到 $e_{\max}^{n+1} \le e_{\max}^n - \lambda \Delta x (V_i - V_{i-1}) e_{\max}^n + Z_{\max}^n$; 当 i=N 时, $e_{\max}^{n+1} \le e_{\max}^n - \lambda \Delta x (V_N - V_{N-1}) e_{\max}^n - \lambda \alpha_L (1-\beta) V_N + Z_{\max}^n < e_{\max}^n - \lambda \Delta x (V_N - V_{N-1}) e_{\max}^n + Z_{\max}^n$ 。 当第一种类型下, $V_i > V_{i-1}$,故有

$$e_{\max}^{n+1} < e_{\max}^n + Z_{\max}^n \tag{24}$$

由于差分方程问题与偏微分方程定解问题采用相同的初始条件,当 n=0 时,有 $C_i^0=c_i^0$,所以 $e_i^0=0$ ($i=0,1,\cdots,N$),从而有 $e_{\max}^0=0$ 。于是,依据式有

$$\begin{aligned} e_{\text{max}}^{\text{I}} < & e_{\text{max}}^{\theta} + Z_{\text{max}}^{0} = Z_{\text{max}}^{0} \\ e_{\text{max}}^{2} < & e_{\text{max}}^{\text{I}} + Z_{\text{max}}^{\text{I}} < Z_{\text{max}}^{0} + Z_{\text{max}}^{\text{I}} \\ e_{\text{max}}^{3} < & e_{\text{max}}^{2} + Z_{\text{max}}^{2} < Z_{\text{max}}^{0} + Z_{\text{max}}^{2} + Z_{\text{max}}^{2} \end{aligned}$$

如此类推,对于某个时刻 t_M 有

$$e_{\max}^{M} < Z_{\max}^{0} + Z_{\max}^{1} + Z_{\max}^{2} + \dots + Z_{\max}^{M-1}$$
 (25)

若记 $Z_{\max} = \max_{0 \leqslant n \leqslant M-1} \{Z_{\max}^n\}$,则得到 $e_{\max}^M \leqslant MZ_{\max}$,且 $\Delta t = t_M/M$,得到

$$e_{\max}^{M} t_{M} \max_{0 \leqslant n \leqslant M-1} \{ |o(\Delta t) + o(\Delta x)| \}$$
 (26)

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 和 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $e_{\max}^{M} \rightarrow 0$, 可见显式差分格式是收敛的。

故在正向渗流类型下,当 $1-\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(\alpha_L V_{i+\frac{1}{2}}+\alpha_L V_{i-\frac{1}{2}}+\Delta x V_i)\geqslant 0$ 时,一维显式差分格式是绝对收敛的。

2.4.2 逆向渗流类型的收敛条件

当为逆向渗流类型时,左侧海水水位低于右侧淡水水位,根据式(14)得到

$$\frac{C_{i}^{n+1} - C_{i}^{n}}{\Delta t} + o(\Delta t) = \frac{\alpha_{L} \left[V_{i+\frac{1}{2}}'(C_{i+1}^{n} - C_{i}^{n}) - V_{i-\frac{1}{2}}'(C_{i}^{n} - C_{i-1}^{n}) \right]}{(\Delta x)^{2}} - \frac{V_{i}'C_{i}^{n} - V_{i-1}'C_{i-1}^{n}}{\Delta x} + o(\Delta x)$$
(27)

同理得到误差 ei 的差分式为

$$\begin{cases}
e_{i}^{n+1} = \lambda \alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}}' e_{i+1}^{n} \left[1 - \lambda (\alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}}' + \alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{i}') \right] e_{i}^{n} + \lambda (\alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{i-1}') e_{i-1}^{n} + Z_{N}^{n} \quad (1 \leqslant i \leqslant N) \\
e_{N}^{n+1} = \left\{ 1 - \lambda \left[\alpha_{L} (1 - \beta) V_{N}' + \alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{N}' \right] \right\} e_{N}^{n} + \lambda (\alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{N-1}') e_{N-1}^{n} + Z_{N}^{n} \quad (i = N)
\end{cases}$$
(28)

当满足

$$\begin{cases}
1 - \lambda (\alpha_L V_{i+\frac{1}{2}}' + \alpha_L V_{i-\frac{1}{2}}' - \Delta x V_{i}') \geqslant 0 \\
\alpha_L V_{i-\frac{1}{2}}' - \Delta x V_{i-1}' \geqslant 0
\end{cases}$$
(29)

根据绝对值不等式

$$\begin{cases}
|e_{i}^{n+1}| = \lambda \alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}}' |e_{i+1}^{n}| \left[1 - \lambda (\alpha_{L} V_{i+\frac{1}{2}}' + \alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{i}) \right] |e_{i}^{n}| + \lambda (\alpha_{L} V_{i-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{i-1}') |e_{i-1}^{n}| + |Z_{i}^{n}| & (1 \leq i \leq N) \\
|e_{N}^{n+1}| = \left\{ 1 - \lambda \left[\alpha_{L} (1 - \beta) V_{N}' + \alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{N} \right] \right\} |e_{N}^{n}| + \lambda (\alpha_{L} V_{N-\frac{1}{2}}' + \Delta x V_{N-1}') |e_{N-1}^{n}| + |Z_{N}^{n}| & (i = N)
\end{cases}$$
(30)

当 $i = 0, 1, \dots, N-1$ 时,同理有: $e_{\max}^{n+1} \leq e_{\max}^{n} - \lambda \Delta x (V_i' - V_{i-1}') e_{\max}^{n} + Z_{\max}^{n}$;

当 i = N 时, $e_{\max}^{n+1} \leq e_{\max}^n - \lambda \Delta x (V_N' - V_{N-1}') e_{\max}^n - \lambda \alpha_L (1 - \beta) V_N' + Z_{\max}^n < e_{\max}^n - \lambda \Delta x (V_N' - V_{N-1}') e_{\max}^n + Z_{\max}^n$ 。 当逆向渗流类型下, $V_i' < V_{i-1}'$,故有 $e_{\max}^{n+1} < e_{\max}^n + Z_{\max}^n$ 。 同理有 $e_{\max}^M t_M \max_{0 \leq n \leq M-1} \{|o(\Delta t) + o(\Delta x)|\}$ 。

3 数值算例

3.1 正向渗流算例

假设存在一个渗流槽,用于模拟海水入侵,槽长 L=1.5 m,宽 B=0.1 m,高 0.6 m,内部填充满含水介质,K=0.000 1 m/s, $\alpha_L=0.2$ m,左侧为定水头和定浓度边界,左侧海水水位为 0.5 m,左侧海水初始离子浓度为 18~000 mg/L;右侧为定水头边界,右侧淡水水位为 0.35 m,且边界衰减因子为 β ,此情况属于正向渗流类型,其示意图见图 3。取 $\Delta x=0.03$ m, $\Delta t=100$ s,求经过一定迭代次数后,在渗流槽中海水盐分扩散后稳定的浓度与扩散距离的关系。初始及边界条件为

广散距离的关系。初始及边界条件为
$$\begin{cases}
\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_L | V_x | \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (V_x C) & (0 < x < 1.5, t > 0) \\
C|_{t=0} = 0 & \\
C|_{x=0} = 18000 & \\
\frac{\partial V}{\partial x}|_{x=1.5} = 0
\end{cases}$$

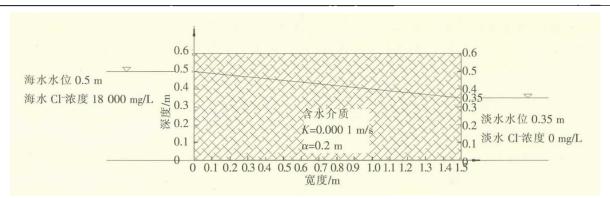


图 3 正向渗流类型下渗流槽尺寸及边界条件示意图

采用有限差分法计算上述算例,在满足收敛条件的情况下,经过 6 000 步迭代次数后,得到节点位置的浓度基本上不随迭代次数的增加而改变,则绘制最终浓度随渗流距离变化的曲线图,并比较边界衰减因子 $\beta=0$ 与 $\beta=1$ 的情况,如图 4 所示。在正向渗流的情况下,右边界处浓度的衰减对最终稳定状态的影响是比较大的,不能忽略。

3.2 逆向渗流算例

当左侧海水水位为 $0.35 \, \mathrm{m}$ 、右侧淡水水位为 $0.5 \, \mathrm{m}$ 时,其他条件均与上述情况相同,此情况为逆向渗流

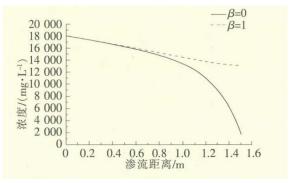


图 4 正向渗流类型下最终浓度随渗流距离的变化情况

类型,其示意图见图 5。采用有限差分法计算上述算例,绘制最终浓度随渗流距离变化曲线图,并比较边界衰减因子 β = 0 与 β = 1 的情况,如图 6 所示。

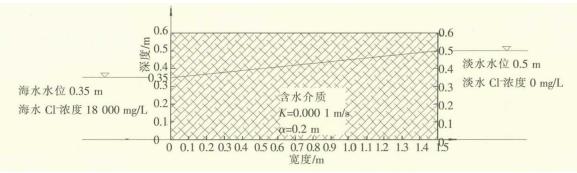


图 5 逆向渗流类型下渗流槽尺寸及边界条件示意图

在逆向渗流的情况下,右边界处浓度的衰减对 最终稳定状态的影响可忽略不计。

4 结论

利用显式有限差分法求解一维对流弥散方程的 数值解,并结合 2 种不同渗流方向的类型,给出了相 应的显式差分式,推导了各自应满足的收敛条件,且 通过实际案例进行算法演示,求解了浓度扩散数值, 最后探讨了在不满足收敛条件的情况下的数值特 性。计算结果表明:

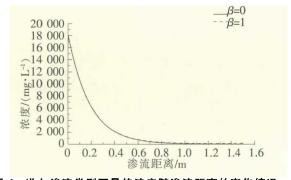


图 6 逆向渗流类型下最终浓度随渗流距离的变化情况

(1)对于 2 种不同的类型,其有限差分的迭代关系式是不同的,要根据海水人侵的速度方向确定属于什么类型,选择相应的迭代关系式,且要预先计算出流速场,流速场采用本文介绍的计算式算出,然后试代 Δx 和 Δt 的值,判定是否满足收敛条件,根据收敛条件选择适当的时间步长 Δt 和空间步长 Δx 。 Δx 和

Δt 的值越小则截断误差越小,计算的结果精确度越高,但相应的计算量和迭代次数会增加,在满足收敛条件下,适当地提高 Δt 的值会大大减少迭代次数。采用显式差分法求解一维对流弥散问题,经过一定的迭代次数后,发现数值稳定了,或者误差在允许范围内,所得到的最终结果便是经过相应时间扩散后的浓度,只要满足相应的收敛条件,其计算结果是收敛且误差较低的。

- (2)在正向渗流的类型下,右边界处浓度的衰减对最终稳定状态的影响是比较大的,不能忽略。在逆向渗流的类型下,右边界处浓度的衰减对最终稳定状态的影响可忽略不计。
- (3)本显式有限差分法能够实现对一维海水人侵对流弥散问题的求解,以往对一维对流弥散方程的求解并没有讨论正向和逆向渗流的情况,讨论在2种不同渗流方向下发生盐分迁移,利用本文所述方法能够计算出各自稳定的浓度情况,原理简单易操作,且能够方便了解每一迭代步内的浓度空间分布情况,更直观研究每个迭代步内的浓度变化规律,是求解海水人侵问题的有效方法。

参考文献

- [1] 聂晶,赵全升,杨天行.海水入侵数学模型研究现状与发展趋势[J]. 鞍山师范学院学报,2002,4(3):16-18.
- [2]杨金忠. 各种求解对流弥散方程数值方法的比较[J]. 武汉水利水电学报, 1987(5): 11-18.
- [3]马荣,石建省,张翼龙. 对流弥散方程显式差分法稳定性分析方法的初探[J]. 水资源与水工程学报,2010,21(1): 132-134.
- [4]陈崇希. 地下水流数值模拟理论方法及模型设计[M]. 北京:地质出版社, 2014:12-22.
- [5] 夏源,吴吉春. 分数阶对流弥散方程的数值求解[J]. 南京大学学报,2007,43(4):441-446.
- [6]杨淑伶. 求解分数阶对流弥散方程的边界值法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2016, 38(4):350-356.
- [7]李新洁,李功胜,贾现正,一维对称空间分数阶对流弥散方程的数值解[J],山东理工大学学报,2011,25(2):52-55,
- [8] Zheng Chunmiao, Gordon D, Bennett. 地下水污染物迁移模拟[M]. 孙晋玉,卢国平,译. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2009.
- [9] David R, Lide. CRC handbook of chemistry and physics [M]. 87th ed. Boca Raton, Florida; CRC Press, 2006.
- [10]齐清兰. 水力学[M]. 北京:中国铁道出版社,2008.

Explicit Difference Method for One-Dimensional Convection Dispersion Equation and its Convergence Analysis

Zhang Liting, Jiang Zhenzhong, Zhang Shaoxiong, Qi Qinglan

(School of Civil Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: In this paper, some characteristics of one-dimensional convection-dispersion equation were comprehensively analyzed. In addition, it was considered that the velocity term coefficients and dispersion coefficients in the difference scheme vary with the location of spatial nodes. Besides, the corresponding difference schemes in different seepage directions were given, and the corresponding convergence conditions were also derived. Moreover, the effect of boundary concentration attenuation was considered. Finally, the method was applied to a practical case. It was found from the calculation results that when the convergence conditions were satisfied, the variation values of concentration in time and space could be calculated. Furthermore, the final results were convergent, but if the corresponding convergence conditions were not satisfied, the calculation results were not convergent. The method presented in this paper can solve the analytical solution of one-dimensional convection-dispersion equation. The method is simple and practical, and the spatial distribution of concentration in each iteration step can be easily understood.

Key words: convection dispersion equation; explicit difference method; convergence condition; forward percolation; reverse percolation; boundary attenuation factor