

# 双频激励下高温超导改进型悬浮架系统的混沌运动研究

张明亮<sup>1,2,3</sup>, 段佳琪<sup>1</sup>, 杨新梦<sup>1</sup>, 刘鹏飞<sup>1</sup>, 张连朋<sup>1</sup>

(1. 石家庄铁道大学 机械工程学院, 河北 石家庄 050043;

2. 石家庄铁道大学 河北省工程机械动力与传动控制重点实验室, 河北 石家庄 050043;

3. 西南交通大学 轨道交通运载系统全国重点实验室, 四川 成都 610031)

**摘要:**为研究高温超导钉扎悬浮列车改进型悬浮架系统的非线性振动行为,探索系统参数和运行参数对其混沌运动的影响,基于冻结镜像模型提出了一种等效处理高温超导体的方法,利用实验数据验证了该方法的正确性,使用该方法得到改进型悬浮架系统的悬浮力数据,采用三次多项式函数拟合数据构建悬浮力经验公式的数学模型。基于该模型建立系统的运动微分方程,使用Melnikov方法求解系统的混沌阈值,研究系统参数与运行参数对混沌阈值的影响,给出系统避免发生混沌运动的参数可行域和方法,以及双频激励下不发生联合共振时两激励频率应满足的关系。

**关键词:**改进型悬浮架;非线性振动;混沌;Melnikov方法;参数可行域

**中图分类号:** U266.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 2095-0373(2023)04-0074-08

## 0 引言

磁悬浮制式通常分为永磁磁悬浮制式、常导磁悬浮制式和超导磁悬浮制式。永磁磁悬浮制式导向不稳定,常导磁悬浮制式不能精细反馈控制,而超导磁悬浮制式具有被动稳定的优点。超导磁悬浮制式一般又分为低温超导电动磁悬浮制式和高温超导钉扎磁悬浮制式。与低温超导电动磁悬浮制式相比,高温超导钉扎磁悬浮制式利用高温超导体的磁通钉扎作用,在产生悬浮力的同时,又能实现横向稳定的导向力,且具有超导态低成本实现的特点,成为一种新型的、悬浮导向一体化的轨道交通工具<sup>[1]</sup>。研究表明,其悬浮系统是典型的非线性系统<sup>[2]</sup>,且磁轨耦合易发生共振,影响列车的安全性和舒适性<sup>[3]</sup>。因此,近年来,对高温超导磁通钉扎悬浮列车非线性振动行为的研究成为该领域的一个研究热点<sup>[4]</sup>。

LEI et al<sup>[5]</sup>对垂直振动下的高温超导磁通钉扎悬浮列车如何长期保持悬浮稳定进行研究,发现采用预紧力法并选取合适的预紧高度可以有效改善悬浮力的衰减。同时LI et al<sup>[6]</sup>发现,增加二系悬挂系统也能提高减振性能。为了增强高温超导磁通钉扎悬浮系统的阻尼特性,ZHANG et al<sup>[7]</sup>引入了涡流阻尼器。MOON<sup>[8]</sup>从研究系统的混沌运动角度出发,利用实验以及数值仿真证明了高温超导磁通钉扎悬浮系统在某些外部激励下就会产生混沌运动。ZHUO et al<sup>[9]</sup>通过研究改进的悬浮力数学模型,发现系统通过倍周期分岔和阵发性2条路径可出现混沌运动。尽管上述研究可以分析高温超导磁通钉扎悬浮系统的部分非线性振动行为,但针对系统参数和运行参数对混沌的综合影响研究相对较少。

现基于Melnikov方法为高温超导钉扎悬浮列车改进型悬浮架系统通往混沌运动的研究提供了一种新的思路:利用等效处理方法得到改进型悬浮架系统的悬浮力数据,建立系统的运动微分方程,使用Melnikov方法推

收稿日期:2023-07-30 责任编辑:车轩玉 DOI:10.13319/j.cnki.sjztdxxb.20230199

基金项目:河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2022064);国家自然科学基金青年项目(52205064);牵引动力国家重点实验室(西南交通大学)开放课题(TPL2010);河北省科技研发平台建设专项(21567622H);河北省自然科学基金面上项目(A2022210024)

作者简介:张明亮(1984—),男,副教授,研究方向为机械工程。E-mail:zmlhit@126.com

张明亮,段佳琪,杨新梦,等.双频激励下高温超导改进型悬浮架系统的混沌运动研究[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2023,36(4):74-81.

导出系统的混沌阈值,分析系统参数与运行参数对混沌阈值的影响,给出系统避免发生混沌运动的可行域。

## 1 改进型悬浮架系统的提出

高温超导磁通钉扎悬浮列车通常采用上方高温超导体和下方永磁轨道的布置方式,这种传统的上下单层布置方式在列车运行时存在着一定的脱轨风险。为了提升列车运行的安全性和增大悬浮特性,将传统的高温超导体与永磁轨道单层面相对式的悬浮架系统改为双层抱轨式。包含改进型悬浮架系统的高温超导磁通钉扎磁悬浮列车主要组成部分如图1所示,高温超导块组合与永磁轨道之间存在着上下2个悬浮间隙,其值各自可变但和为定值,在后续的研究中,悬浮间隙是指上悬浮间隙。

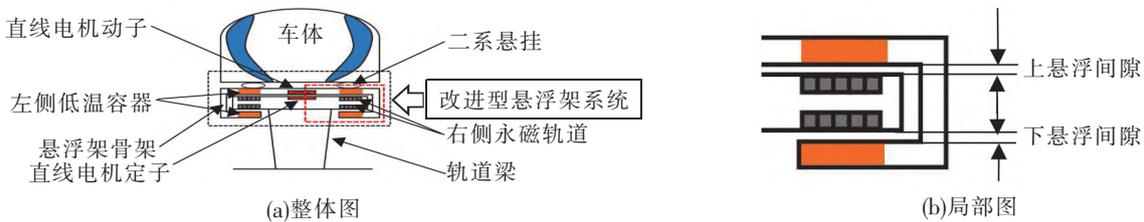


图1 包含改进型悬浮架系统的高温超导磁通钉扎磁悬浮列车主要组成示意图

## 2 悬浮力理论分析及讨论

### 2.1 实验装置和测试原理

利用实验装置测试高温超导块组合与永磁轨道之间的悬浮力数据。实验装置实物如图2所示,其测试原理如图3所示。



图2 悬浮力实验装置

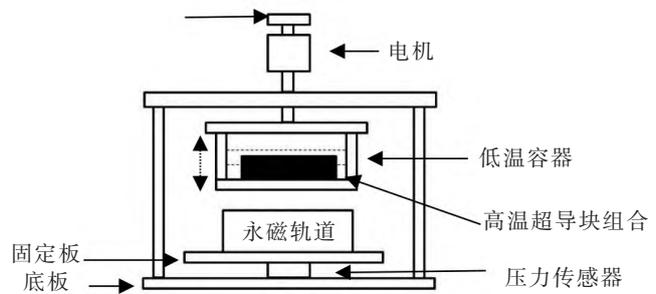


图3 悬浮力实验装置测试原理示意图

实验测试的基本步骤:利用电机旋转丝杆螺母机构产生的直线运动带动低温容器上下运动(见虚线双向箭头),使高温超导块组合接近永磁轨道,保持两者之间的距离不变(设定场冷高度);将液氮倒入低温容器中,使高温超导块组合在永磁轨道的磁场下冷却进入超导态(即场冷);高温超导块组合在直线电机的带动下上下移动,位移传感器测量上下移动的悬浮间隙,压力传感器测量得到悬浮力。

### 2.2 等效处理方法提出和验证

针对高温超导块组合处于超导态时(浸泡在液氮中)的混合特性,基于冻结镜像模型<sup>[10]</sup>提出了等效处理高温超导体的方法:基于冻结镜像将高温超导块组合等效处理成磁化的磁体,模拟捕获磁场的特性;基于移动镜像将其等效处理成具有较小的相对导磁率模拟抗磁性,进行矢量求和得到高温超导块组合与永磁轨道之间宏观的悬浮力,该悬浮力类似于非线性特征的弹簧。基于等效处理方法得到在场冷高度为 0.022 m 时,不同悬浮间隙下的悬浮力理论数据,将其与实验数据进行对比,如图4所示。

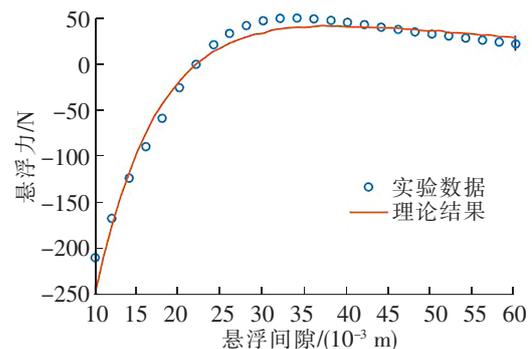


图4 悬浮力和悬浮间隙的关系

由图 4 可观察到无论是实验测量还是理论计算的悬浮力,均随着悬浮间隙的增大先快速上升至最大值后缓慢下降,最终趋向于 0,且在场冷高度处悬浮力为 0,表明该位置为不受重力影响下的平衡点  $z_{eq}$ ,且理论结果与实验数据吻合较好,验证了等效处理方法的正确性。

### 3 改进型悬浮架系统的动力学建模

文献[11]研究表明高温超导块组合和永磁轨道之间存在着阻尼。当悬浮架本体振动时,高温超导块下方导电材料(如铜)产生涡流阻尼力,阻尼力大小和系数可通过铜的结构和尺寸改变。为分析轨道不平顺对系统振动响应的影响,考虑悬浮力、重力和阻尼力建立改进型悬浮架系统的垂向力学模型如图 5 所示。

基于达朗贝尔原理,得到改进型悬浮架系统的垂向振动动力学方程

$$m\ddot{z}_1 = -c(\dot{z}_1 - \dot{z}_0) - F(z_1 - z_0, t) + mg \quad (1)$$

引入  $z = z_1 - z_0$ , 并令  $F_{sum} = F(z, t) - mg$ 。得到变形后的改进型悬浮架系统垂向动力学微分方程

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + F_{sum} = -m\ddot{z}_0 \quad (2)$$

场冷高度设定为 0.022 m。利用坐标变换原理将平衡点  $z_{eq}$  移至原点, 平移距离  $u$  可表示为  $u = z - z_{eq}$ 。采用三次多项式函数拟合  $F_{sum}$  与  $u$  的关系, 表达式形式如下

$$F_{sum} = k_3 u^3 + k_2 u^2 + k_1 u \quad (3)$$

拟合结果与离散数据对比图如图 6 所示。

由图 6 可以观察到,三次项函数的经验公式与离散数据吻合良好。相比于  $k_1 (1.325 \times 10^5)$  和  $k_3 (2.542 \times 10^8)$ ,  $k_2 (-0.141)$  的值很小,可忽略不计。基于以上变换,得到改进型悬浮架系统的垂向动力学方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k_3 u^3 + k_1 u = -m\ddot{z}_0 \quad (4)$$

轨道不平顺通常包括较多频谱,而在实际效果中往往 1、2 个激励占据主要作用,故假定轨道不平顺的激励为  $z_0 = F_1 \cos(\omega_1 t) + F_2 \cos(\omega_2 t)$ , 将  $z_0$  的表达式代入式(4),得到双频简谐激励下系统的运动微分方程

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k_3 u^3 + k_1 u = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \quad (5)$$

式中,  $m$  为系统的质量;  $c$  为阻尼;  $k_1$  为线性刚度;  $k_3$  为非线性刚度;  $\omega_1$  为第 1 个外部激励频率;  $\omega_2$  为第 2 个外部激励频率;  $A_1 = m F_1 \omega_1^2$ ,  $F_1$  为第 1 个外部激励幅值;  $A_2 = m F_2 \omega_2^2$ ,  $F_2$  为第 2 个外部激励幅值。

### 4 改进型悬浮架系统的混沌特性分析

#### 4.1 混沌阈值的求解和验证

为了后续推导,引入如下变换

$$\begin{cases} b_1 = \frac{k_1}{m} \\ -b_2 = \frac{k_3}{m} \\ B = \epsilon b = \frac{c}{m} \\ A_{10} = \epsilon a_1 = \frac{A_1}{m} \\ A_{20} = \epsilon a_2 = \frac{A_2}{m} \end{cases} \quad (6)$$

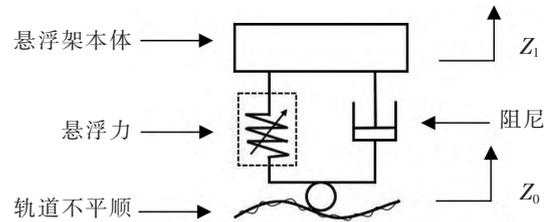


图 5 改进型悬浮架系统的垂向力学模型

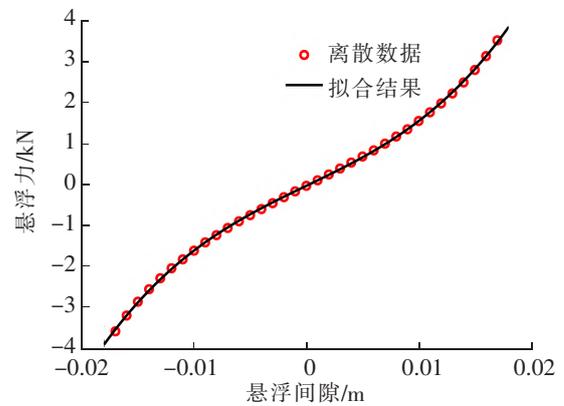


图 6 改进型悬浮架系统的悬浮力与悬浮间隙关系

并将式(5)改写成向量函数的形式

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -b_1 x_1 + b_2 x_1^3 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -b x_2 + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t \end{bmatrix} \quad (7)$$

根据文献[12]介绍的 Melnikov 理论,求解式(7)后将式(6)代入整理,得到发生混沌运动的必要条件为

$$F > \frac{2ck_1}{3m^2} \sqrt{k_1/k_3} / [\pi\omega_1^3 \operatorname{csch}(\pi\omega_1/\sqrt{2k_1/m}) + \pi\omega_2^3 \operatorname{csch}(\pi\omega_2/\sqrt{2k_1/m})] \quad (8)$$

为了验证混沌阈值曲面的正确性,选取表 1 中的参数,得到的混沌阈值曲面如图 7 所示。

表 1 系统参数与运行参数基本取值

参数	$m/\text{kg}$	$c/((\text{N} \cdot \text{s})\text{m}^{-1})$	$k_1/(10^5 (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}))$	$k_3/(10^8 (\text{N} \cdot \text{m}^{-3}))$
取值	50	32	1.325	2.542

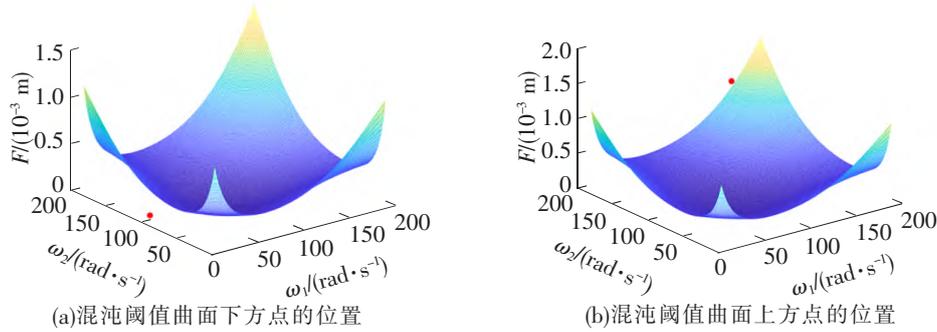


图 7 混沌阈值曲面验证

在图 7 中的混沌曲面上方各选取一点 A、B,代入式(8)进行计算,选择稳态响应的后 10% 进行分析。计算每个激励点处响应的时程图、相图、Poincare 截面和频谱图,如图 8、图 9 所示。

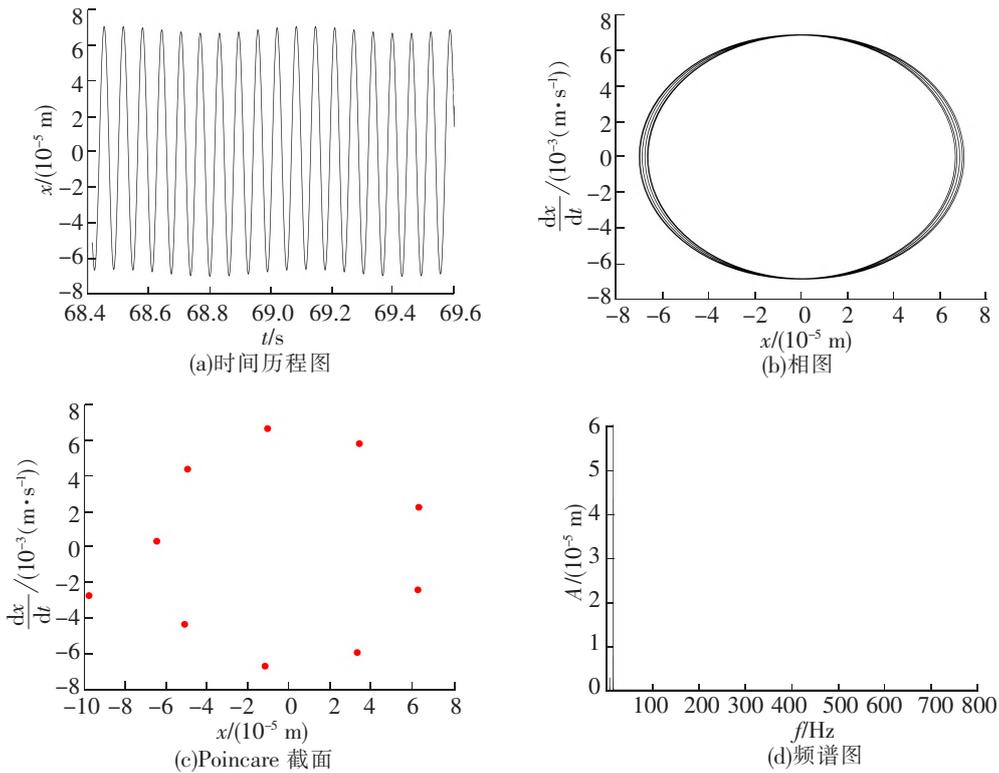


图 8 点 A 处系统的响应

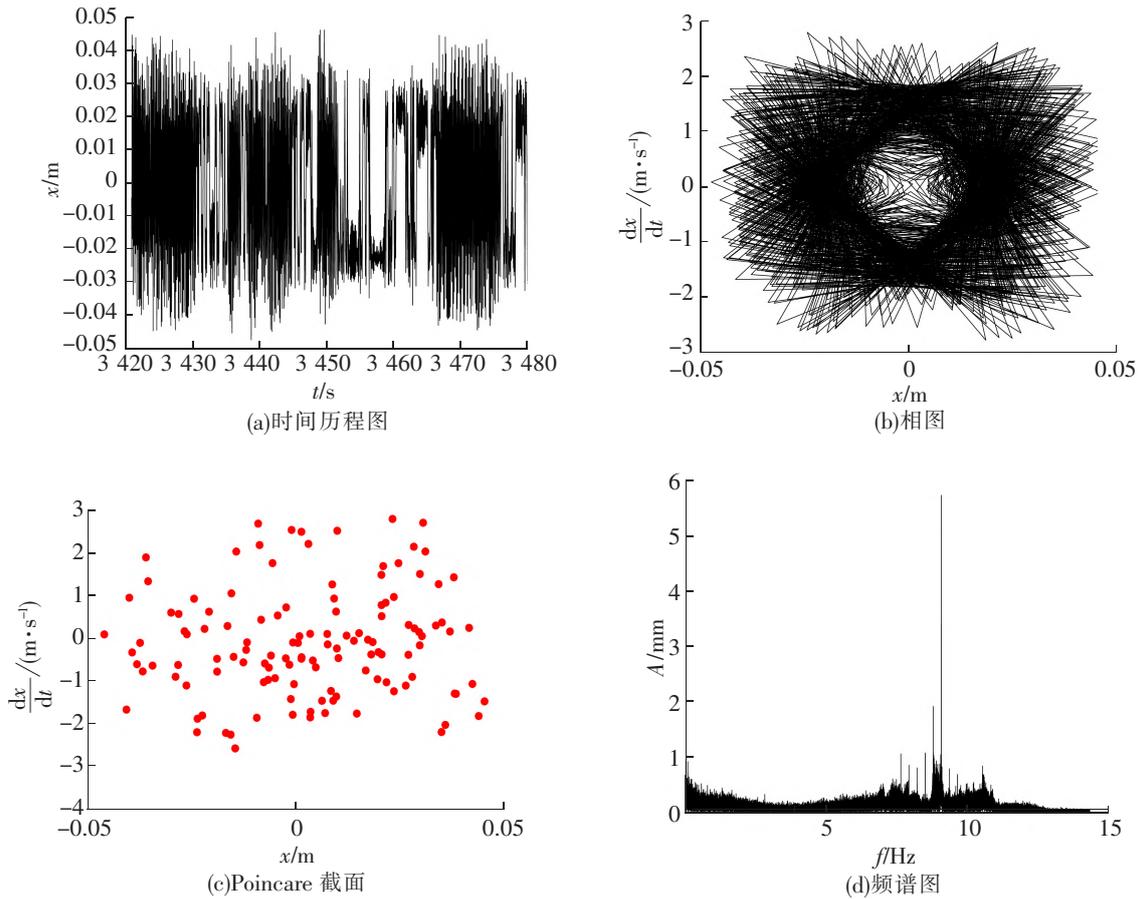


图 9 点 B 处系统的响应

点 A(10, 100, 0.000 05) 位于曲面下方, 理论上系统响应为周期或拟周期运动; 点 B(57, 55.2, 0.002) 位于曲面上方, 其响应状态应为混沌运动或其他。由图 8 可以观察到 A 点为拟周期运动, 图 9 点 B 时程图曲线走势随机但上下有界, 相图规律但有一定范围, Poincaré 截面为有限个离散点的组合, 频谱图有多个连续频率成分, 故此时是混沌运动。由此验证了得到混沌阈值的正确性, 故可利用式(8)进行下一步研究。

#### 4.2 系统参数和运行参数对混沌阈值的影响

当轨道激励为简谐激励时, 根据周期性, 利用轨道不平顺的波长  $\lambda$  以及运行速度  $v$  表示外部激励频率  $\omega$ 。即  $\omega = 2\pi v/\lambda$ , 得到改进型悬浮架系统发生混沌运动的必要条件表达式

$$F > \frac{ck_1}{12v^3 \pi^4 m^2 \sqrt{k_3}} \frac{\sqrt{k_1}}{\lambda_1^3} \operatorname{csch}\left(\frac{2\pi^2 v}{\lambda_1} \sqrt{\frac{m}{2k_1}}\right) + \frac{1}{\lambda_2^3} \operatorname{csch}\left(\frac{2\pi^2 v}{\lambda_2} \sqrt{\frac{m}{2k_1}}\right) \quad (9)$$

取表 1 中数据, 令  $v = 600$  km/h, 观察值见表 2, 以  $\lambda_1, \lambda_2$  为变量,  $F$  为混沌阈值, 由式(9)得到不同系统参数对混沌阈值的影响规律如图 10 所示。图 10 中箭头方向表示随参数增大混沌阈值曲面的移动方向。

表 2 系统参数变化取值

$m/\text{kg}$	$c/((\text{N} \cdot \text{s})\text{m}^{-1})$	$k_1/(10^5 (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}))$	$k_3/(10^8 (\text{N} \cdot \text{m}^{-3}))$
40	22	1.325	1.542
50	32	2.325	2.542
60	42	3.325	3.542

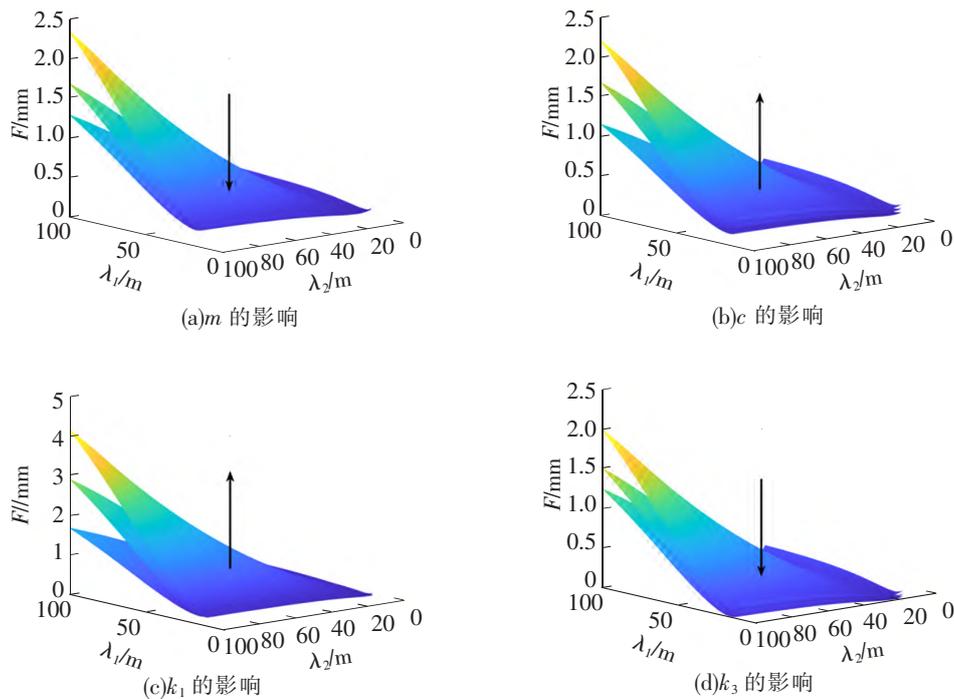


图 10 系统参数对混沌阈值的影响

由图 10 可以观察到,随着质量和非线性刚度的增大,曲面向下移,表明系统发生混沌运动的概率增加;而随着阻尼和线性刚度的增加,系统发生混沌运动的概率减小。因此,设计时应尽量减小系统质量和非线性刚度,增大阻尼和线性刚度。

为了研究动态运行时系统的混沌阈值,计算得到最高设计运行速度为 600 km/h 时对应的激励波长: $\lambda_1 = 20.34$  m,为了避免主共振,根据上海磁悬浮轨道数据,假定  $\lambda_1 = 40$  m 和  $\lambda_2 = 45$  m,则根据式(9)得到轨道不平顺激励幅值和运行速度的混沌阈值曲线,如图 11 所示。

由图 11 观察到运行速度越高对应的安全激励幅值就越低,要求轨道越平顺,基于图 10(b)及表 1 可知,系统阻尼的选取略小,因此,其余数据不变,分别提取阻尼依次增大时的混沌阈值,如图 12 所示。

从图 12 可以得到,混沌阈值随着阻尼的变化呈线性关系,拟合关系式为

$$F = 1.0875 \times 10^{-5} c \quad (10)$$

因此,为了降低建造永磁轨道的难度,当要求激励幅值不小于 1 mm 时,根据式(10),改进型悬浮架系统的阻尼应该不小于 92.0 N·s/m。

研究的是双频激励下高温超导磁通钉扎悬浮列车改进型悬浮架系统的振动行为,而双频激励除了主共振也会产生联合共振的情况,如主-超谐联合共振和主-亚谐联合共振。根据主共振时对应的激励波长, $\lambda_2$  取值在

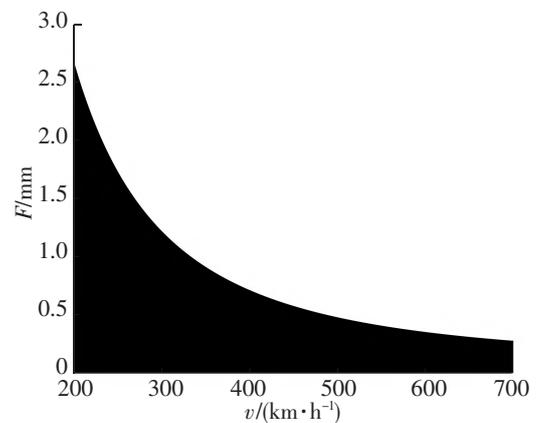


图 11 激励幅值与运行速度的混沌阈值曲线

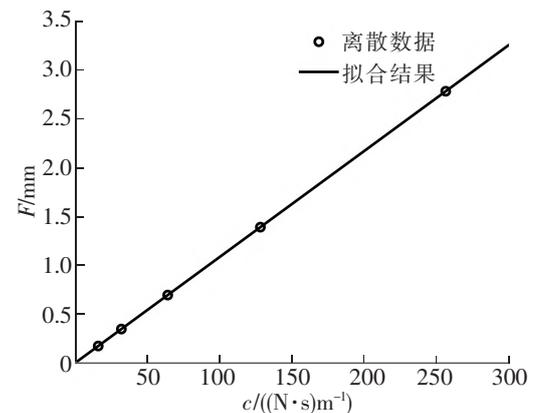


图 12 混沌阈值随阻尼变化情况曲线

6.78~60.96 m 范围内。通过式(9)分析波长  $\lambda_2$  对混沌阈值  $F$  的影响,如图 13 所示。

由图 13 可以观察到在  $A_p$  点( $\lambda_2 = 13.58$  m)处的混沌阈值较低,此时波长约为主共振波长的 0.67 倍。因此在设计永磁轨道时,若其中一个外部激励频率与系统固有频率接近,另一个外部激励频率取值应该避免取固有频率的 0.67 倍附近,以降低列车出现混沌运动的可能。

## 5 结论

研究了双频率激励下高温超导磁通钉扎悬浮列车改进型悬浮架系统的混沌运动,分析了系统参数和运行参数对混沌阈值的影响,主要结论如下:

(1)混沌阈值随着质量和非线性刚度的增大而减小,随着阻尼和线性刚度的增大而增大,故为了避免系统发生混沌运动,应减小系统的质量和非线性刚度,增大系统的阻尼和线性刚度。

(2)在最高运行速度 600 km/h 时,激励幅值混沌阈值随着阻尼的增大近似线性增大,为了降低建造永磁轨道的难度,激励幅值不小于 1 mm,改进型悬浮架系统的阻尼应该不小于 92.0 N·s/m。

(3)当一个激励频率接近固有频率时,另一个激励频率应避免取固有频率的 0.67 倍。

## 参 考 文 献

- [1]DENG Z G, ZHANG W H, ZHENG J, et al. A high-temperature superconducting maglev ring test line developed in Chengdu, China[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016, 26(6):1-8.
- [2]LI J P, LI H T, ZHENG J, et al. Nonlinear vibration behaviors of high-Tc superconducting bulks in an applied permanent magnetic array field[J]. Journal of Applied Physics, 2017, 121(24):1-6.
- [3]苏红建, 刘灿昌, 栾军超, 等. 磁悬浮列车磁轨耦合内共振分析[J]. 噪声与振动控制, 2023, 43(1):173-178.
- [4]WANG L, DENG Z G, KOU L, et al. Stiffness characteristic of high temperature superconducting upper maglev system [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 167: 1-12.
- [5]LEI W Y, ZHENG J, HUANG Z C, et al. Study of long-time levitation performance of high temperature superconducting maglev under vertical vibration[J]. Physica C: Superconductivity and its Applications, 2022, 600: 1-17.
- [6]LI H T, KE Z H, HUANG H, et al. Vibration suppression of high-temperature superconducting maglev system via semi-active suspension system[J]. Physica C: Superconductivity and its Applications, 2022, 601: 1-8.
- [7]ZHANG P H, ZHAO J Z, LI H T, et al. Vibration reduction using eddy current damper in high-temperature superconducting maglev system[J]. Journal of Superconductivity and Novel Magnetism, 2022, 35: 87-94.
- [8]MOON F C. Chaotic vibrations of a magnet near a superconductor[J]. Physics Letters A, 1988, 132(5):249-252.
- [9]ZHUO P J, ZHANG Z X, GOU X F. Chaotic motion of a magnet levitated over a superconductor[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016, 26(2):1-6.
- [10]张明亮, 李明远, 刘鹏飞, 等. 面向高温超导钉扎磁悬浮列车悬浮特性研究[J]. 中国机械工程, 2022, 33(22): 2764-2771.
- [11]LI J P, DENG Z G, XIA C H, et al. Subharmonic resonance in magnetic levitation of the high temperature superconducting bulks  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  under harmonic excitation[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2019, 29(4): 1-8.
- [12]李航, 申永军, 杨绍普, 等. Duffing 系统的主-超谐联合共振[J]. 物理学报, 2021, 70(4):119-128.

## Study on Chaotic Motion of High Temperature Superconducting Improved Suspension System Under Dual-Frequency Excitation

Zhang Mingliang<sup>1,2,3</sup>, Duan Jiaqi<sup>1</sup>, Yang Xinmeng<sup>1</sup>, Liu Pengfei<sup>1</sup>, Zhang Lianpeng<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

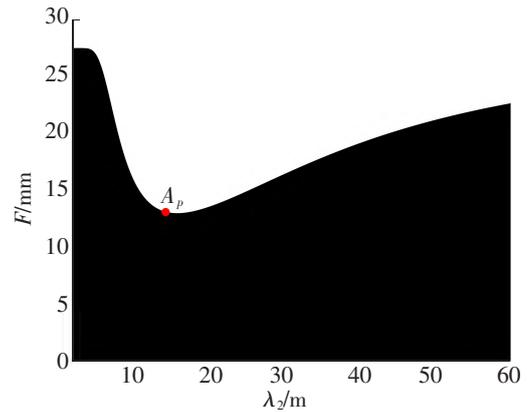


图 13 关于  $\lambda_2$  混沌阈值曲线

2. Hebei Key Laboratory of Power and Transmission Control of

Construction Machinery, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

3. State Key Laboratory of Rail Transit Vehicle System, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** In order to study the nonlinear vibration behavior of the improved suspension frame system of high temperature superconducting flux-pinned suspension train and explore the influence of system parameters and operating parameters on its chaotic motion, a method of equivalent treatment of high temperature superconductor was proposed based on the frozen image model. The correctness of the method was verified by way of the experimental data, thus the suspension force data of the improved suspension frame system was obtained with this method. The mathematical model of the suspension force empirical formula was constructed using the cubic polynomial function fitting data. Based on this model, the differential equation of motion of the system was established. The Melnikov method was used to solve the chaotic threshold of the system, and the influence of system parameters and operating parameters on the chaotic threshold was studied. The feasible region and method of parameters for the system to avoid chaotic motion were given, and the relationship between the two excitation frequencies when the joint resonance did not occur under dual frequency excitation was provided.

**Key words:** improved suspension frame; nonlinear vibration; chaos; Melnikov method; parameter feasible region

~~~~~  
(上接第 73 页)

## Evaluation of Two-Way Transportation Benefits of Heavy-Haul Railway

Zhang Yongheng<sup>1,2</sup>, Zhang Jiankai<sup>1</sup>, Qin Jin<sup>2</sup>

(1. China Shenhua Energy Company Limited, Beijing 100011, China;

2. School of Traffic & Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** Most of China's heavy-haul railways face the issue of unbalanced volumes, resulting in a certain amount of wasted transportation capacity. The mode of two-way transportation of heavy-haul railway is carried out. An evaluation method of heavy-haul railway's two-way transportation benefits was proposed so that the railway operation department can clarify this mode's benefits. The index of "comprehensive benefits of two-way transportation" including economic and environmental benefits, was used to determine the transportation benefits. The numerical example was designed to examine the effects of reverse transportation volumes and cargo type on two-way transportation benefits. The results show that, when the proportion of reverse and forward transportation volumes increases from 2% to 20%, the comprehensive benefits of two-way transportation increase by 5.25%. When the proportion of reverse and forward transportation volumes is from 2% to 20%, the proportion of high-value-added goods in reverse transportation increases from 5% to 30%, and the total benefits of two-way transportation reach 0.43% and 4.18%, respectively. On the whole, heavy-haul railway lines in China can develop two-way transportation mode, and ensure a stable reverse supply of goods through strategies such as cooperating with enterprises that have freight needs in the transit area, so as to promote comprehensive benefits and realization of two-way transportation.

**Key words:** railway transportation; heavy-haul railway; benefits evaluation; two-way transportation mode of heavy-haul railway; environmental benefits