

高温超导钉扎磁悬浮系统分岔和混沌特性研究

张明亮^{1,2,3}, 杨新梦¹, 刘丽茹¹, 张连朋¹

(1.石家庄铁道大学 机械工程学院,河北 石家庄 050043;

2.西南交通大学 牵引动力国家重点实验室,四川 成都 610031;

3.兰州交通大学 光电技术与智能控制教育部重点实验室,甘肃 兰州 730070)

摘要:高温超导钉扎磁悬浮系统的应用十分广泛,但由于其悬浮力的非线性特性,导致在实际应用中经常引起设备的异常振动。为了探究高温超导钉扎磁悬浮系统的非线性振动特性和寻找避免发生异常振动的措施,首先,通过实验装置测量不同悬浮间隙下的悬浮力数据,将其拟合成指数模型,然后,基于该模型建立简谐激励下高温超导钉扎磁悬浮系统的动力学模型,最后,研究系统的分岔和混沌特性。研究表明,系统存在丰富的非线性动力学行为;系统的混沌阈值随着激励频率的增大先减小后增大,即系统在低频阶段和高频阶段不易发生混沌运动,而在中频阶段易发生混沌运动;质量、阻尼和场冷高度对混沌阈值均存在一定影响。研究结果为高温超导钉扎磁悬浮系统的参数设计及其抑振方法提供参考。

关键词:高温超导钉扎磁悬浮系统;非线性振动;分岔;混沌;最大 Lyapunov 指数

中图分类号:U266.4 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-0373(2023)02-0069-07

0 引言

1987年,人们首次发现液氮中的高温超导体($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$)和永磁体之间具有悬浮力和导向力的现象,经过研究得知,由于高温超导体处在混合态时具有的磁通钉扎效应^[1],使其可以稳定地悬浮在永磁体上,并且功耗很低^[2],因此具有较为广泛的应用,如飞轮储能^[3-4]、磁悬浮轴承^[5-6]以及磁悬浮列车^[7-8]等。然而经过大量的试验与理论研究,发现高温超导钉扎磁悬浮系统的悬浮力是非线性的^[1,9-10],且由于非线性特性引起的异常振动现象更是屡见不鲜,给设备的正常工作以及人员的安全带来了隐患。因此,近年来众多学者开展了高温超导钉扎磁悬浮系统的非线性振动研究,取得了较为丰富的成果。LI et al^[11]测试高温超导体与 Halbach 阵列的永磁轨道之间的悬浮力,提出了悬浮力的指数模型,并且通过实验验证了该模型的正确性;随后,该团队基于悬浮力指数模型研究了高温超导钉扎磁悬浮系统受谐波激励时的振动特性,确定了系统发生次共振的激励范围^[2];LI et al^[12-13]分别研究了高温超导钉扎磁悬浮系统垂向和横向运动的稳定性,给出了稳定性的条件,并分析了磁滞效应对运动的影响;WEINBERGER et al^[10]研究了不同激励下磁悬浮系统的振动特性,发现当外界激励频率约为系统固有频率的2倍时,系统会发生共振;ZHUO et al^[14]利用改进的悬浮力模型研究发现系统从倍周期分岔和阵发性通往混沌的2条路径。尽管上述研究能够分析高温超导钉扎磁悬浮系统的部分非线性行为,但对于该系统的分岔和混沌特性研究较少。因此,测试了悬浮力,得到悬浮力指数模型的系数取值;基于该模型,建立高温超导钉扎磁悬浮系统受谐波激励时的运动微分方程,分析激励参数对分岔的影响,给出改善分岔现象的措施;使用最大 Lyapunov 指数方法计算混沌阈值,并分析系统参数对混沌阈值曲线的影响规律。研究结果对高温超导钉扎磁悬浮系统的参数设计和避免异常行为提供依据。

收稿日期:2022-11-18 责任编辑:车轩玉 DOI:10.13319/j.cnki.sjztdxsb.20220348

基金项目:河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2022064);河北省自然科学基金青年项目(E2021210065);光电技术与智能控制教育部重点实验室(兰州交通大学)开放课题(KFKT2020-7);牵引动力国家重点实验室(西南交通大学)开放课题(TPL2010)

作者简介:张明亮(1984—),男,讲师,研究方向为磁悬浮技术。E-mail:zmlhit@126.com

张明亮,杨新梦,刘丽茹,等.高温超导钉扎磁悬浮系统分岔和混沌特性研究[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2023,36(2):69-75.

1 谐波激励下高温超导钉扎磁悬浮系统的动力学模型

1.1 悬浮力实验装置及实验步骤

高温超导钉扎磁悬浮系统的悬浮力测试装置型号为 SCML-01^[15],如图 1 所示,测试原理如图 2 所示。实验采用 Halbach 阵列永磁轨道,材料为钕铁硼,轨道长度为 800 mm,实物如图 3 所示,具体尺寸参数和磁化方向如图 4 所示,其中充磁方向为箭头方向,黑色两边采用纯铁,起着聚磁作用。为了形成较大的超导平面,高温超导体利用多个高温超导块组合起来,简称高温超导块组合,具体采用 10 块 YB-CO 高温超导块,单块尺寸为 $\Phi 30\text{ mm}\times 14\text{ mm}$,按 5×2 的方式排列,如图 5 所示。



图 1 悬浮力实验装置

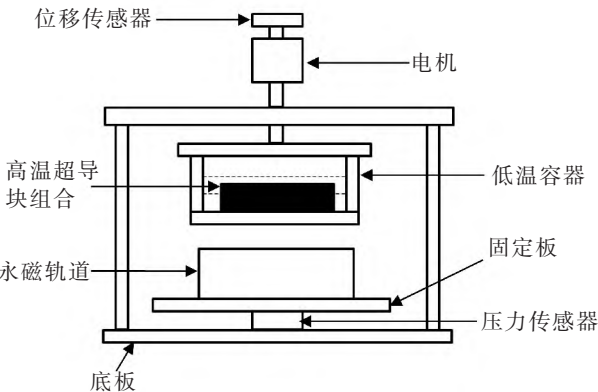


图 2 测试原理示意图

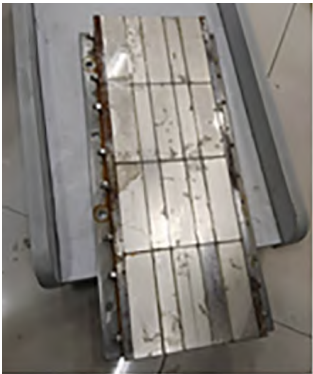


图 3 永磁轨道实物

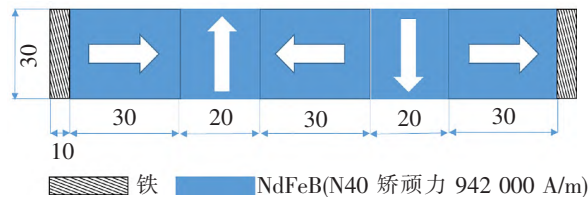


图 4 永磁轨道横截面图(单位:mm)

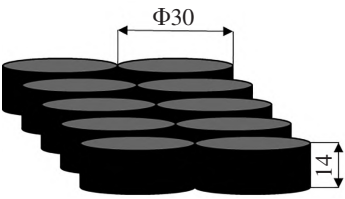


图 5 高温超导块组合方式(单位:mm)

悬浮力测试试验步骤为:①将高温超导块组合接近永磁轨道,此时高温超导块组合与永磁轨道之间的距离称为场冷高度;②利用液氮使高温超导块组合在永磁轨道的磁场中冷却至 77 K 进入超导态;③在电机带动下上下移动高温超导块组合,位移传感器测量上下移动的悬浮间隙,压力传感器测量高温超导块组合与永磁轨道间的悬浮力,完成悬浮力数据的采集过程。

1.2 动力学模型的建立

LI et al^[11]对文献[14]提出的悬浮力模型进行了简化,并且经过试验验证了简化后模型的正确性。简化后的悬浮力模型为

$$F(x,t)=Kxe^{\beta x} \tag{1}$$

式中, x 为超导块的位移; K 、 β 为 2 个悬浮力参数。将悬浮力实验数据以式(1)的方式进行拟合,得到不同场冷高度下的拟合系数,见表 1。

表 1 不同场冷高度的拟合结果

场冷高度 z/mm	$K/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	β/m^{-1}	场冷高度 z/mm	$K/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	β/m^{-1}
18	15 000	75	25	7 000	76
20	11 000	80	30	4 500	76
22	9 000	76	35	4 400	77

在外界激励的类型中,谐波激励是典型的激励,故重点研究谐波激励下高温超导钉扎磁悬浮系统的响应特性,其运动学模型如图 6 所示。以高温超导体的场冷高度作为原点,向下为正建立坐标系。高温超导体悬浮在 Halbach 阵列永磁轨道之上,其底部是由于轨道不平顺、永磁体磁力不均匀、永磁体损坏等因素而产生的激励,其表达式为

$$y = a \cos(2\pi ft) \quad (2)$$

式中, a 为激励幅值; f 为激励频率。

建立系统的运动微分方程

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + F(x - y, t) = mg \quad (3)$$

引入变换 $z = x - y$, 并将式(2)代入式(3)中,整理可得

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + F(z, t) = ma(2\pi f)^2 \cos(2\pi ft) + mg \quad (4)$$

将式(4)写成状态方程的形式

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = [ma(2\pi f)^2 \cos(2\pi ft) - cz_2 - F(z_1, t) + mg]/m \end{cases} \quad (5)$$

该状态方程能表征高温超导块在 Halbach 阵列永磁轨道上受谐波激励时的运动特性。利用龙格-库塔方法对式(5)进行求解,则高温超导块的运动状态为

$$\begin{cases} x = z + y = z_1 + a \cos(2\pi ft) \\ \dot{x} = \dot{z} + \dot{y} = z_2 - 2\pi fa \sin(2\pi ft) \end{cases} \quad (6)$$

2 系统分岔特性分析

2.1 单参数分岔研究

根据文献[11]及拟合结果,选取仿真参数 $m = 2.25 \text{ kg}$, $c = 32 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $K = 7\,000 \text{ N/m}$, $\beta = 76 \text{ m}^{-1}$ 。文献[2]报道了高温超导钉扎磁悬浮系统在频率为 7 Hz、幅值分别为 2、7.2、8.44 mm 的这 3 种激励下系统响应形式完全不同。但是该激励参数的选择具有离散化特点,并不能完整地反映系统响应的连续变化过程,为了分析激励幅值连续变化对系统响应状态的影响,在激励频率 7 Hz 的情况下,使用 Matlab 计算得到系统响应随激励幅值 a 的分岔图及最大 Lyapunov 指数图,如图 7 所示。

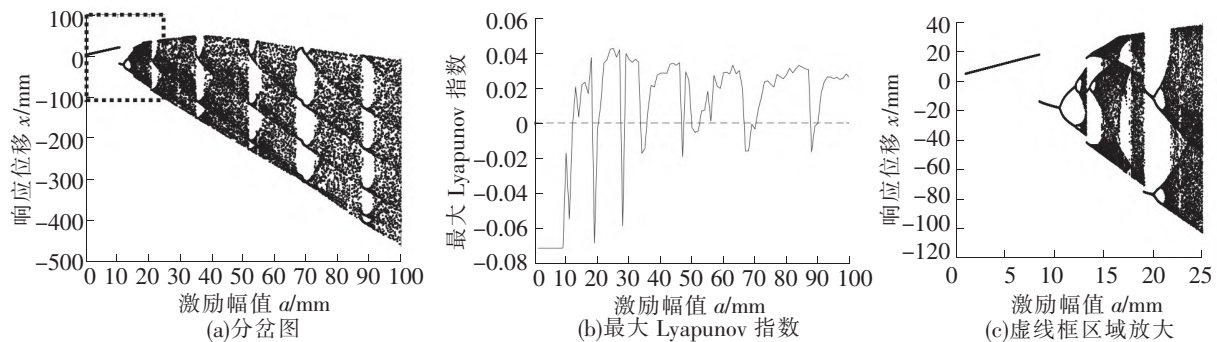


图 7 激励频率为 7 Hz 时系统的分岔图

由图 7(a)、图 7(b)可知,在激励幅值为 0~100 mm 的范围内,系统响应变化为混沌区域与周期窗口交替出现,并且周期窗口周期数逐渐递增。由图 7(c)可知,在较小激励范围内,系统响应随着激励幅值增大包括:周期 1、跳跃现象、周期 2 响应、倍周期分岔、周期 4 以及混沌运动等状态,这些类型的响应对于高温超导钉扎磁悬浮系统的正常工作是不利的。上述研究仅针对激励频率为 7 Hz,下面研究不同激励频率下系统响应随激励幅值在 0~20 mm 范围内的分岔情况,其中一些典型响应如图 8 所示。

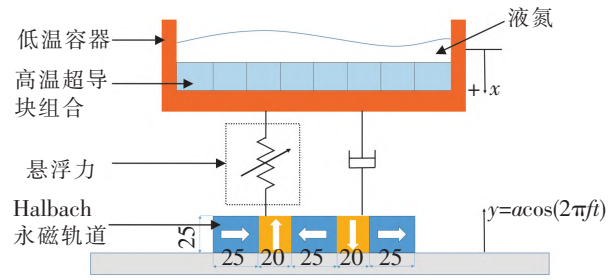


图 6 谐波激励下高温超导磁悬浮动力系统示意图(单位:mm)

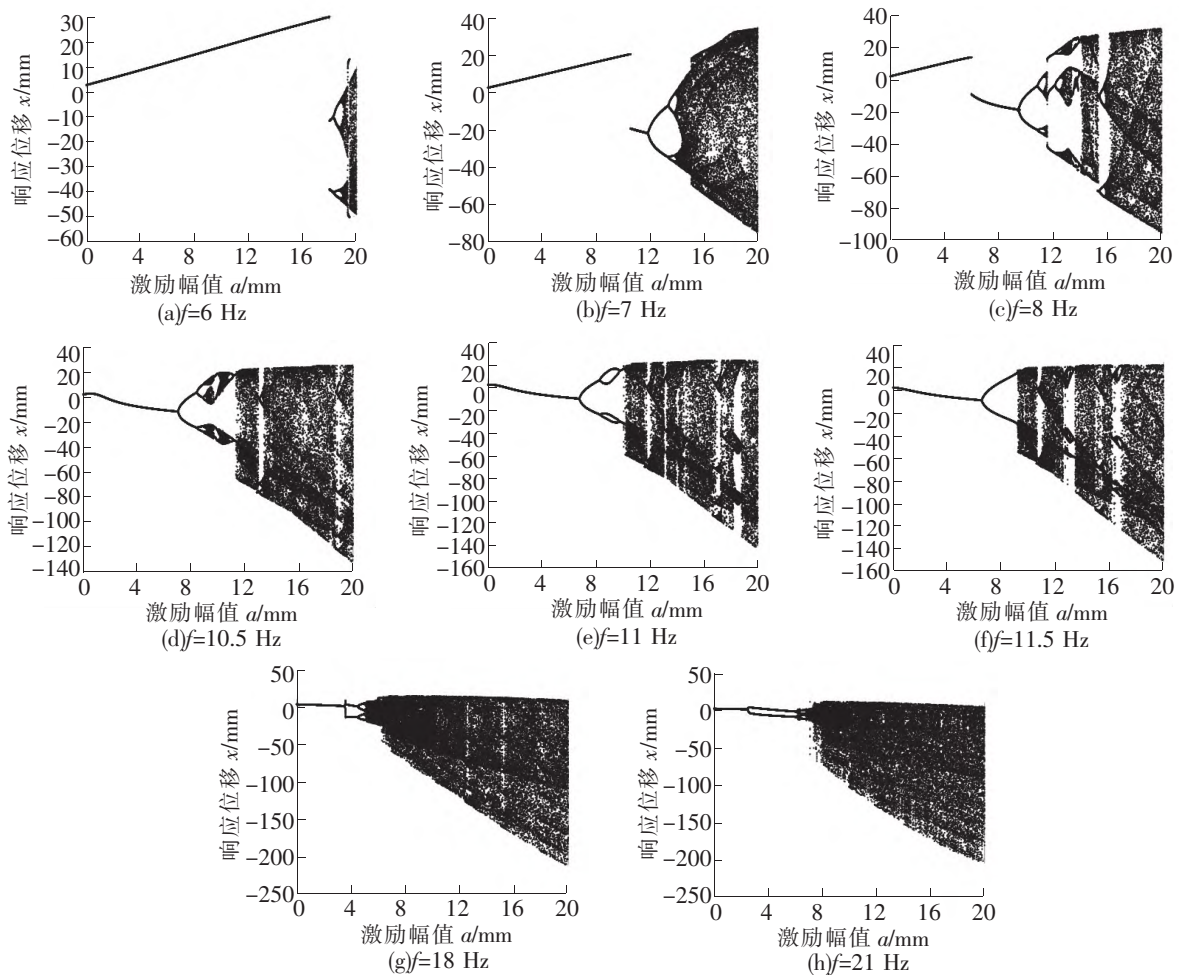


图 8 不同激励频率下系统响应随激励幅值变化的分岔图

由图 8 可知,随着激励频率的增大,在 8~10.5 Hz 范围内响应变化较丰富:8 Hz 时分岔图出现多个包含块状混沌区域的周期泡结构;10.5 Hz 时退化成 2 个周期泡,其内部分别含有 2 个或 3 个小的混沌区域;11 Hz 处 2 个周期泡内的混沌区域消失,变成周期运动。值得注意的是,在较高的激励频率下如图 8(h) 的 21 Hz,此时较小的激励幅值虽不会使系统进入混沌状态,但是会产生倍周期分岔。以上结果说明应尽量控制高温超导钉扎磁悬浮系统受到的激励是低频激励,否则系统容易进入异常状态。

为了分析高温超导钉扎磁悬浮系统在小激励幅值下运动情况,分析不同激励幅值下系统响应随激励频率的分岔行为,如图 9 所示。

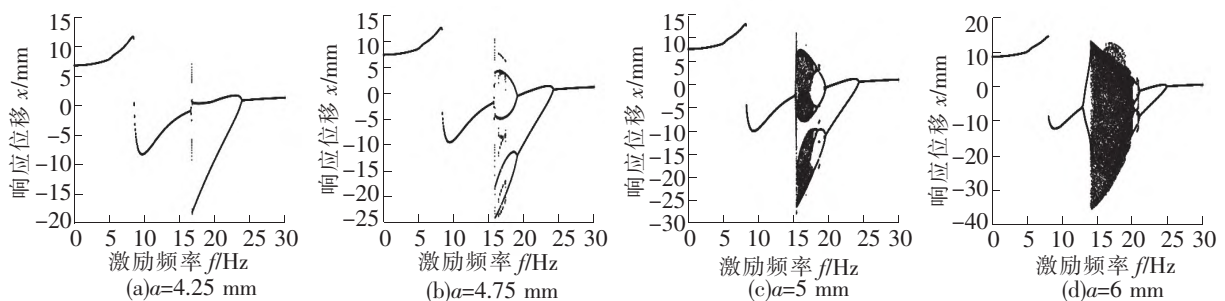


图 9 不同激励幅值下系统响应随激励频率变化的分岔图

整体来看,激励幅值为 4.25 mm 时系统进行周期或拟周期运动,在 8.2 Hz(系统固有频率附近)响应幅值有跳跃现象,16.4 Hz(2 倍固有频率附近)发生了分岔;激励幅值为 4.75 mm 时,分岔图生成了 2 个小的周期泡,随后周期泡生长,5 mm 时周期泡内已长出“花瓶”状的混沌区域,当激励幅值达到 6 mm,2 个

小的混沌区域融合在一起,形成一个竖立的“拱形”混沌区域,继续增大激励幅值,分岔图无明显变化。

2.2 双参数分岔研究

设置激励幅值范围 $(0\ 20]\text{mm}$,激励频率范围 $(0\ 20]\text{Hz}$ 。计算得到双参数的分岔图,如图 10 所示,图 10 中黑色表示混沌状态,白色表示周期运动。沿着图 10 中黑色虚线($a = f = \beta$)从左下方到右上方,作 x - β 平面内的分岔图,如图 11 所示。

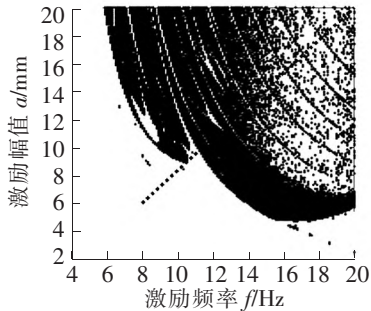


图 10 系统双参数分岔图

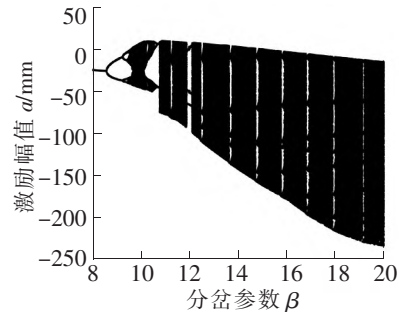


图 11 沿虚线方向系统分岔图

结合图 10 与图 11,沿虚线左下到右上,系统响应状态变化为:先由周期 1 经倍周期分岔进入周期 2,随后再次经倍周期分岔进入周期 4,再后进入混沌状态,出现周期 3 窗口后退化成周期 4,然后逆倍周期分岔进入周期 2,最后再进入混沌状态,随后混沌与周期现象交替出现,混沌窗口的周期分别是周期 3、周期 4、周期 5、周期 6、周期 7、周期 8 等,每经历一次周期窗口,周期数就加 1,这种独特的现象在部分动力系统中同样存在,如 HR 神经元模型动力系统^[16]。

由此可见高温超导钉扎磁悬浮系统在 2 个参数平面内存在丰富的分岔模式,通过观察双参数平面上系统的分岔演化行为,能够更容易地判断不同激励参数组合下高温超导块组合的运动状态。

3 系统混沌阈值研究

为了获得随 2 个激励参数变化,系统进入混沌运动状态的最低门槛值,通过计算最大 Lyapunov 指数来寻找系统首次发生混沌运动的位置,便可以得到较为精确的混沌阈值。混沌阈值寻找的计算方法为:寻找不同激励频率下系统响应随着激励幅值增大至第一次出现混沌的位置,并记录该位置。由此得到高温超导钉扎磁悬浮系统不同激励频率下的混沌阈值,如图 12 所示。

由图 12 可以观察到混沌阈值随着激励频率的增大,总体上表现为先减小后增大,由此表明在低频段和高频段发生混沌的门槛值较高,而在中频段发生混沌的门槛值较低。如果外界激励的幅值与频率落在该曲线上或者曲线上方的区域,系统就有可能发生混沌运动,落在曲线下方,系统则不会发生混沌运动。

为了探寻系统参数对混沌阈值的影响规律,选取 $m = 2.00\text{ kg}$, $c = 12\text{ N} \cdot \text{s/m}$, $K = 12\ 000\text{ N/m}$,保持其中 2 个参数不变,分析另一个参数的影响,得到不同参数下混沌阈值的变化规律,如图 13 所示。

在图 13 中,箭头方向表示混沌阈值曲线随参数增大而移动的方向,由图 13 可知,等间隔的增大质量,混沌曲线整体向左下方移动,且下降速度逐渐缓慢,说明系统混沌阈值对小质量的变化较敏感,发生混沌运动的可能性增大;等间隔的增大阻尼,混沌曲线向上移动,且上移速度逐渐加快,说明系统混沌阈值对大阻尼的变化较敏感,系统发生混沌的可能性减小;此外,不同的 K 值(不同的场冷高度导致 K 值变化,场冷高度越大 K 值小)对混沌阈值也有影响,由图 13(c)可知,增大 K 值即降低场冷高度,低频段混沌阈值略有升高,高频段混沌阈值均匀降低,总体上混沌阈值向下移动,这表明较大的场冷高度相较于较小的

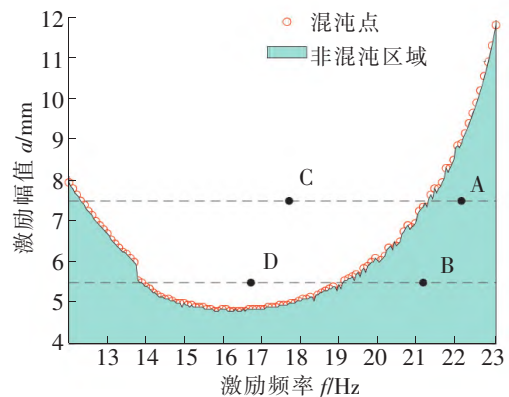


图 12 高温超导钉扎磁悬浮系统的混沌阈值曲线

场冷高度,系统的性能更优。

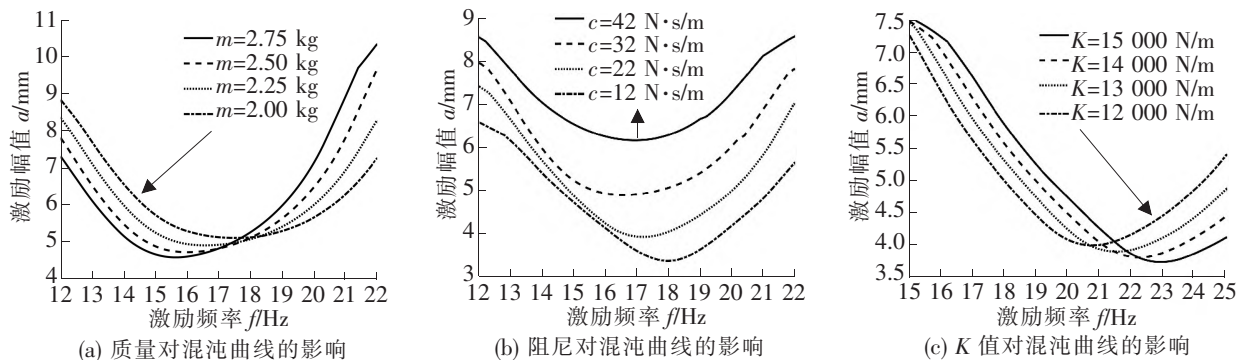


图 13 系统参数对混沌阈值曲线的影响

4 结论

(1) 高温超导钉扎磁悬浮系统存在十分丰富的非线性动力学行为。总体上,系统受低频激励(小于 7 Hz)时不容易发生异常振动,在中频段(7~21 Hz)系统容易进入混沌状态,而在高频段(大于 21 Hz)则易发生分岔。

(2) 随着激励幅值由小到大的变化,在系统固有频率 8.2 Hz 附近,响应幅值存在“跳跃”现象;而在 2 倍固有频率 16.4 Hz 附近先产生了 2 个周期泡,之后 2 个周期泡内部各自产生 1 个“花瓶”状混沌区域,最后 2 个混沌区域逐渐扩大,融合成了 1 个竖立的“拱形”混沌区域。

(3) 不同参数对混沌阈值的影响规律不同:减小质量,可降低低频段系统发生混沌的可能性;增大阻尼,可降低系统发生混沌的可能性;使其工作在较高的场冷高度工况,可降低高频段系统发生混沌运动的可能性。

参 考 文 献

- [1] HULL J R. Superconducting bearings[J]. Superconductor Science & Technology, 2000,13(2):1-15.
- [2] LI Jipeng, DENG Zigang, XIA Chenchao, et al. Subharmonic resonance in magnetic levitation of the high temperature superconducting bulks $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ under harmonic excitation[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2018,99:1-2.
- [3] OGATA M, MATSUE H, YAMASHITA T, et al. Test equipment for a flywheel energy storage system using a magnetic bearing composed of superconducting coils and superconducting bulks[J]. Superconductor Science & Technology, 2016,29(5),1-7.
- [4] 邓自刚,王家素,王素玉,等. 高温超导飞轮储能技术发展现状[J]. 电工技术学报, 2008,23(12):1-10.
- [5] 邓自刚,王家素,王素玉,等. 高温超导磁悬浮轴承研发现状[J]. 电工技术学报, 2009,24(9):1-8.
- [6] STRASIK M, JOHNSON P E, DAY A C, et al. Design, fabrication, and test of a 5-kWh/100-kW flywheel energy storage utilizing a high-temperature superconducting bearing[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2007,17(2):2133-2137.
- [7] DENG Zigang, ZHANG Weihua, ZHENG Jun, et al. A High-temperature superconducting maglev-evacuated tube transport (HTS Maglev-ETT) test system[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2017,27(6):1-8.
- [8] SOTELO G G, OLIVEIRA R D, COSTA F S, et al. A full scale superconducting magnetic levitation (maglev) vehicle operational line[C]// IEEE Transactions on Applied Superconductivity.[S.l.]: IEEE, 2015:1-5.
- [9] MOON F C. Chaotic vibrations of a magnet near a superconductor[J]. Physics Letters A, 1988, 132(5):249-252.
- [10] WEINBERGER B R, LYND S L, HULL J R. Magnetic bearings using high temperature superconductors: some practical considerations[J]. Superconductor Science & Technology, 1990,3(7):381-388.
- [11] LI Jipeng, LI Haotao, ZHENG Jun, et al. Nonlinear vibration behaviors of high-Tc superconducting bulks in an applied permanent magnetic array field[J]. Journal of Applied Physics, 2017,121(24):1-6.

- [12] LI Jipeng, ZHENG Jun, HUANG Huan, et al. Motion stability of the magnetic levitation and suspension with $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ high-Tc superconducting bulks and NdFeB magnets[J]. Journal of Applied Physics, 2017, 122(15): 1-8.
- [13] LI Haitao, DENG Zigang, JIN Li'an, et al. Lateral motion stability of high-temperature superconducting maglev systems derived from a nonlinear guidance force hysteretic model[J]. Superconductor Science and Technology, 2018, 31(7): 1-8.
- [14] ZHUO Peijun, ZHANG Zhaoxia, GOU Xiaofan. Chaotic motion of a magnet levitated over a superconductor[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016, 26(2): 1-6.
- [15] WANG Jiasu, WANG Suyu, REN Z Y. et al. Levitation force of a YBaCuO bulk high temperature superconductor over a NdFeB guideway[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2001, 11(1): 1801-1804.
- [16] 张薇, 安新磊, 王红梅, 等. mHR 神经元模型的分岔分析及其哈密顿能量控制[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2021, 43(3): 486-494.

Study on Bifurcation and Chaos Characteristics of High Temperature Superconducting Magnetic Levitation System

Zhang Mingliang^{1,2,3}, Yang Xinmeng¹, Liu Liru¹, Zhang Lianpeng¹

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

2. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

3. Key Laboratory of Opto-technology and Intelligent Control of Ministry of Education, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: High temperature superconducting (HTS) flux pinned magnetic levitation (FP maglev) system is widely used, however, due to the nonlinear feature of the levitation force, anomalous vibration of the equipment is commonly created in the real applications. In order to examine the nonlinear vibration characteristics of HTS FP maglev system and identify strategies to avoid anomalous vibration, firstly, the levitation force data under different gaps were measured by experimental equipment and fitted into an exponential model, then the dynamic model of HTS FP maglev system under harmonic excitation was established based on the model, finally, the bifurcation and chaotic properties of the system were investigated. The research shows that: the system exhibits rich nonlinear dynamic characteristics; the chaotic threshold of the system decreases first and then increases with the growing of the excitation frequency, that is, the system is not prone to be into chaotic motion in low frequency and high frequency, but prone to chaotic motion in the intermediate frequency; the system mass, damping and field cooling height have a certain impact on the chaos threshold. The findings of this study might serve as a guidance for designing parameters and suppressing vibrations in HTS maglev systems.

Key words: HTS FP maglev system; nonlinear vibration; bifurcation; chaos; largest Lyapunov exponent