第 35 卷 第 3 期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 35 No.3
2022 年 9 月 Journal of Shijiazhuang Tiedao University(Natural Science Edition) Sep. 2022

分数阶平方阻尼 Mathieu 振子的动力学分析

郭建斌[1]， 申永军[1,2]

(1.石家庄铁道大学 机械工程学院，河北 石家庄 050043；
2.石家庄铁道大学 交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室，河北 石家庄 050043)

摘要：研究了谐波激励下分数阶平方阻尼 Mathieu 振子的主共振。首先采用多尺度法得到了主共振的近似解析解，利用数值方法验证了近似解的准确性。然后建立了系统定常解的幅频曲线方程，基于 Lyapunov 第一方法得到了稳态响应的稳定性条件，分析了强迫主共振和参激共振下系统特有的幅频特性。最后通过数值仿真研究了分数阶微分项对系统幅频特性的影响。结果表明，利用分数阶微分项系数和阶次能对系统响应幅值和振动频率等形成一种双重调节，可有效改善系统幅频特性。

关键词：Mathieu 振子；分数阶微分；主共振；稳定性

中图分类号：O322；O313 文献标志码：A 文章编号：2095－0373(2022)03－0098－06

分数阶微积分被提出以来，众多学者对其开展了详细的探讨，尤其在分数阶微积分定义和计算方法方面取得了显著成果[1-2]。在这个过程中，分数阶微积分也由数学理论研究逐步走向工程应用[3-4]。在动力学领域，利用分数阶微积分描述黏弹性材料的本构关系，提高此类非线性系统振动特性研究的准确性是当下的研究热点之一。如 Cao et al[5]通过建立分数阶阻尼模型，研究了分数阶阻尼对系统的影响，展现了分数阶系统特有的动力学特性。申永军等[6-7]研究了分数阶微分项在线性和非线性系统中的作用机理，首次提出了等效线性阻尼和等效线性刚度概念。Xu et al[8]结合摄动法和多尺度法，提出了一种处理随机谐波激励作用下强非线性分数阶系统的新方法。

Mathieu 方程作为 Hill 方程的一种特殊形式，因其复杂的动力学特性，在参激振动研究中得到了广泛应用。例如，温少芳[9]以高速列车弓网系统为对象，建立了含分数阶导数的 Mathieu 模型，证明了利用分数阶微分项参数表示弹簧参数的可行性。陈予恕等[10]研究了 van der Pol-Duffing-Mathieu 振子主参数共振的二次近似分岔行为，证明了采用摄动法描述此类系统周期响应和分岔行为的可靠性。此外，在船舶工程领域，非线性阻尼 Mathieu 振子是用来研究船舶横摇运动的重要模型之一。丁勇等[11]在线性加平方阻尼的基础上，建立了船舶横摇参激振动模型，研究了非线性阻尼对系统主参数共振稳态解的影响。唐友刚等[12]通过分析立方阻尼 Mathieu 方程，分析了系统的主参数共振，为研究船舶倾覆机理奠定了基础。

综上所述，众多学者已对典型的 Mathieu 系统作了深入分析，关于分数阶系统振动特性的研究也趋于成熟。在参激系统中引入分数阶微分项，研究其在此类系统中的作用规律，不仅可以完善此类系统模型，同时还可以丰富黏弹性器件的应用场景。因此，建立了含分数阶微分项的平方阻尼 Mathieu 模型，利用多尺度法研究系统的主共振响应，通过数值仿真分析分数阶微分项对该系统幅频特性的作用效果，所得结果为黏弹性材料在此类系统隔振、减振研究方面的应用提供了理论验证。

1 一次近似解

研究如下含平方阻尼的分数阶 Mathieu 振子模型

收稿日期：2022－03－28 责任编辑：车轩玉 DOI：10.13319/j.cnki.sjztddxxbzrb.20220073
基金项目：国家自然科学基金(U1934201)；石家庄铁道大学研究生创新项目(YC2021043)
作者简介：郭建斌(1994—)，硕士研究生，研究方向为机械系统动力学。E-mail：350019995@qq.com
郭建斌，申永军.分数阶平方阻尼 Mathieu 振子的动力学分析[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版)，2022，35(3)：98-103.

$$\ddot{u}(t)+[\omega_0^2+2\varepsilon\cos(2\omega t)]u(t)+\varepsilon g[u(t),\dot{u}(t)]+KD^p[u(t)]=F\cos(\omega t) \tag{1}$$

式中,ω_0、ω、F 分别为系统固有频率、强迫激励频率、幅值;$g[u(t),\dot{u}(t)]$为阻尼项,包含线性阻尼和平方阻尼;$KD^p[u(t)]$为分数阶微分项,其中 $K(K>0)$和 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$分别是分数阶微分项的系数和阶次。这里采用 Caputo 型分数阶微积分定义

$$D^p[u(t)]=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t\frac{u'(s)}{(t-s)^p}\mathrm{d}s \tag{2}$$

式中,$\Gamma(z)$为 Gamma 函数,具有 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$的特性。

研究强迫激励频率 $\omega\approx\omega_0$ 时的主共振情况,且要求激励幅值 F 为小量,为方便计算引入 $\omega=\omega_0+\varepsilon\sigma$,$F=\varepsilon f$,$K=\varepsilon k$,$\sigma=O(1)$,$f=O(1)$,$k=O(1)$ 。

式(1)变换为

$$\ddot{u}+\omega_0^2=\varepsilon\{-[2\cos(2\omega_0 t+2\varepsilon\sigma t)]u-g[u(t),\dot{u}(t)]-KD^P[u(t)]+f\cos(\omega_0 t+\varepsilon\sigma t)\} \tag{3}$$

式中,ε 为小参数,满足 $0<\varepsilon\ll 1$。

采用多尺度法研究系统一次近似解,引入 2 个时间尺度 $T_0=t$、$T_1=\varepsilon t$,并假设式(3)的解有以下形式

$$u(t;\varepsilon)=u_0(T_0,T_1)+\varepsilon u_1(T_0,T_1) \tag{4}$$

将式(4)代入式(3),比较 ε 的同次幂,得到一组偏微分方程

$$D_0^2u_0+\omega_0^2u_0=0 \tag{5}$$

$$D_0^2u_1+\omega_0^2u_1=-2D_0D_1u_0+f\cos(\omega_0T_0+\sigma T_1)-2\cos(2\omega_0T_0+2\sigma T_1)-kD_{T_0}^pu_0+g(u_0,D_0u_0) \tag{6}$$

式(5)的解为

$$u_0(T_0,T_1)=a(T_1)\cos[\omega_0T_0+\beta(T_1)] \tag{7}$$

式中,$a(T_1)$、$\beta(T_1)$为慢变振幅、相位。为方便计算,可将式(7)写成复数形式

$$u_0(T_0,T_1)=A(T_1)\mathrm{e}^{i\omega_0T_0}+cc \tag{8}$$

式中,$A(T_1)=\dfrac{a(T_1)}{2}\mathrm{e}^{i\beta(T_1)}$;$cc$ 为前述所有项的共轭。这里利用公式[1]对分数阶微分项 $kD_{T_0}^pu_0$ 进行处理

$$D_{T_0}^pA(T_1)\mathrm{e}^{i\omega_0T_0}\approx A(T_1)\omega_0^p\mathrm{e}^{i\left(\omega_0T_0+\frac{p\pi}{2}\right)}+cc \tag{9}$$

将式(8)和式(9)代入式(5),可得到消除永年项条件

$$-2i\omega_0D_1A-k\omega_0^pA\mathrm{e}^{i\frac{p\pi}{2}}-\overline{A}\mathrm{e}^{2i\sigma T_1}+\frac{f}{2}\mathrm{e}^{i\sigma T_1}+\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}g(A\mathrm{e}^{i\omega_0T_0}+cc,i\omega_0A\mathrm{e}^{i\omega_0T_0}+cc)\mathrm{e}^{-i\omega_0T_0}\mathrm{d}T_0=0 \tag{10}$$

将 $A(T_1)=\dfrac{a(T_1)}{2}\mathrm{e}^{i\beta(T_1)}$ 代入式(10),分离实虚部,得到

$$D_1a=\frac{a}{2\omega_0}\sin(2\beta-2\sigma T_1)-\frac{f}{2\omega_0}\sin(\beta-\sigma T_1)-\frac{a}{2}k\omega_0^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)-\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}g(a\cos\theta-a\omega_0\sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

$$aD_1\beta=\frac{a}{2\omega_0}\cos(2\beta-2\sigma T_1)-\frac{f}{2\omega_0}\cos(\beta-\sigma T_1)+\frac{a}{2}k\omega_0^{p-1}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)-\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}g(a\cos\theta-a\omega_0\sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{12}$$

其中

$$\theta=\omega T_0+\beta \tag{13}$$

再引入

$$\varphi=\beta-\sigma T_1 \tag{14}$$

同时代入阻尼项 $g[u(t),\dot{u}(t)]=\mu_1\dot{u}+\mu_2\dot{u}|\dot{u}|$并对其积分,可将式(11)式 (12)化为自治形式

$$D_1a=\frac{a}{2\omega_0}\sin(2\varphi)-\frac{f}{2\omega_0}\sin(\varphi)-\frac{\mu_1a}{2}-\frac{4\mu_2a^2\omega_0}{3\pi}-\frac{a}{2}C(p) \tag{15}$$

$$aD_1\beta=-\sigma a+\frac{a}{2\omega_0}\cos(2\varphi)-\frac{f}{2\omega_0}\cos(\varphi)+\frac{a}{2}K(p) \tag{16}$$

式中,$K(p)=k\omega_0^{p-1}\cos\left(\dfrac{p\pi}{2}\right)$;$C(p)=k\omega_0^{p-1}\sin\left(\dfrac{p\pi}{2}\right)$,系统的一次近似解为

$$u(t)=a\cos(\omega_0 T_0+\beta)=a\cos(\omega_0 T_0+\sigma T_1+\varphi)=a\cos(\omega t+\varphi) \tag{17}$$

式中，a 和 φ 由式(15)、式(16)确定。

由式(17)可见，系统主共振近似解的振动频率等于强迫激励频率且是参数激励频率的 1/2，此外，相比传统的 Mathieu 系统，分数阶微分项分量 $K(p)$ 和 $C(p)$ 分别作用于周期解的幅值和相位，使其存在定量上的差别，导致了响应幅值的降低和相位的滞后。

为验证近似解的准确性，利用式(1)进行数值仿真，得出的数值解与式(17)计算出的近似解析解作对比。利用文献[2]中介绍的数值方法研究系统(1)，该方法的近似公式为

$$D^p[u(t_n)]\approx h^{-p}\sum_{j=1}^{n}C_j^p u(t_{n-j}) \tag{18}$$

式中，t_n 为时间采样点，$t_n=nh$；h 为时间步长；C_j^p 为分数阶二项式系数，有以下迭代关系

$$C_0^p=1,C_j^p=\left(1-\frac{1+p}{j}\right)C_{j-1}^p \tag{19}$$

此外，当 $t=0$ 时，分数阶微分项的初值为

$$D_t^p[u(t)]|_{t=0}=a_0\omega^p\cos\left(\omega t+\varphi_0+\frac{p\pi}{2}\right) \tag{20}$$

固定一组参数 $\varepsilon=0.1$，$\mu_1=0.3$，$\mu_2=0.3$，$\omega_0=1$，$K=0$，$F=0.01$，$p=0.1$。计算系统稳态响应的幅频特性如图 1 所示，图 1 中激励频率 ω 的范围设置为[0.9，1.1]，对于每个给定的 ω，数值仿真步长设定为 0.001，仿真时间 $t=300$ s，并取后 1/10 的幅值作数值解的稳态幅值。再取 $\omega=0.98$、解析解初值$(a_0,\varphi_0)=(2.5,0)$，对应数值解初值由式(17)和式(20)计算得出$(u_0,\dot{u}_0,D^p u_0)=(2.5,0,2.464)$，按前述参数进行计算，得到解析解和数值解的位移时间历程对比图 2。从图 1 和图 2 中可以看出解析解和数值解有很高的拟合度。

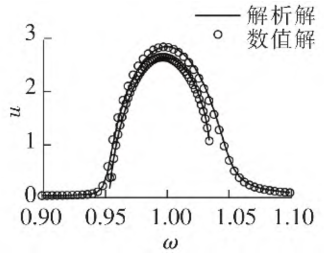


图 1 幅频曲线对比

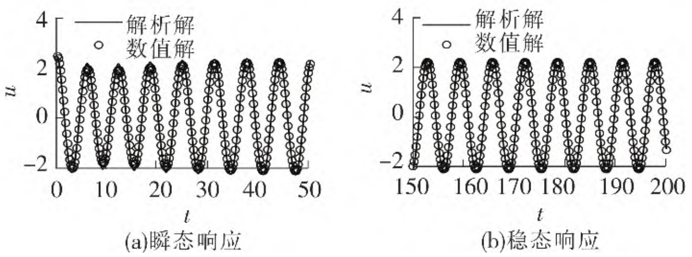


图 2 位移时间历程图对比

2 定常解及其稳定性

令式(15)、式(16)中 $D_1 a=0$，$D_1\varphi=0$，得到关于稳态振幅 $\bar{a}$ 和相位 $\bar{\varphi}$ 的代数方程组

$$\frac{\bar{a}}{2\omega_0}\sin(2\bar{\varphi})-\frac{f}{2\omega_0}\sin(\bar{\varphi})-\frac{\bar{a}}{2}C(p)-\frac{\mu_1\bar{a}}{2}-\frac{4\mu_2\bar{a}^2\omega_0}{3\pi}=0 \tag{21}$$

$$-\sigma\bar{a}+\frac{\bar{a}}{2\omega_0}\cos(2\bar{\varphi})-\frac{f}{2\omega_0}\cos(\bar{\varphi})+\frac{\bar{a}}{2}K(p)=0 \tag{22}$$

可由式(21)、式(22)推导出非零定常解的幅频和相频方程

$$2\omega_0 f^2\left(\sigma-\frac{K(p)}{2}+\omega_0 H\right)+f^2=8\bar{a}^2\omega_0^4 H^2 \tag{23}$$

$$\bar{\varphi}=\arccos\frac{2\bar{a}\omega_0^2}{f}H \tag{24}$$

式中，$H=\frac{1}{4\omega_0^2}+\frac{f^2}{4\bar{a}^2\omega_0^2}-\left(\frac{C(p)}{2}+\frac{\mu_1}{2}+\frac{4\bar{a}\mu_2\omega_0}{2\pi}\right)^2-\left(\sigma-\frac{K(p)}{2}\right)^2$。

此外，以上求得的非零定常解能否实现还取决于其是否具有渐近稳定性。这里利用 Lyapunov 第一方法来计算稳态运动的稳定性条件，以此来考察解的稳定性。用慢变振幅 a 和相位 φ 定义二维状态向量

$\boldsymbol{V}=[a,\varphi]^{\mathrm{T}}$,构造向量函数

$$\boldsymbol{F}(V)=\begin{bmatrix}\dfrac{a}{2\omega_0}\sin(2\varphi)-\dfrac{f}{2\omega_0}\sin(\varphi)-\dfrac{a}{2}C(p)-\dfrac{\mu_1 a}{2}-\dfrac{4\mu_2 a^2\omega_0}{3\pi}\\ -\sigma+\dfrac{1}{2\omega_0}\cos(2\varphi)-\dfrac{f}{2a\omega_0}\cos(\varphi)+\dfrac{1}{2}K(p)\end{bmatrix}\tag{25}$$

在稳态响应$(\bar{a},\bar{\varphi})$处的 Jacobi 矩阵和特征方程分别为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sin 2\bar{\varphi}}{2\omega_0}-\dfrac{C(p)}{2}-\dfrac{\mu_1}{2}-\dfrac{8\mu_2\bar{a}\omega_0}{3\pi} & \dfrac{\bar{a}\cos 2\bar{\varphi}}{2\omega_0}-\dfrac{f\cos\bar{\varphi}}{2\omega_0}\\ \dfrac{f\cos\bar{\varphi}}{2\bar{a}^2\omega_0} & \dfrac{f\sin\bar{\varphi}}{2\bar{a}\omega_0}-\dfrac{\sin 2\bar{\varphi}}{\omega_0}\end{bmatrix}\tag{26}$$

$$\lambda^2-P\lambda+Q=0\tag{27}$$

式中,$P=\mathrm{tr}\boldsymbol{J}$;$Q=\det[J]$。

由 Lyapunov 第一方法可知,系统在稳态响应$(\bar{a},\bar{\varphi})$处渐近稳定的条件是 $P<0$ 且 $Q>0$。因此,系统稳态运动的稳定性条件为

$$128\bar{a}^4\mu_2\omega_0^4+48\pi\bar{a}^3\mu_1\mu_2\omega_0^3C(p)+48\pi\bar{a}^3\mu_2\omega_0^3C(p)+18\pi^2\bar{a}f\omega_0[K(p)-2\sigma]\cos\bar{\varphi}-6\pi\bar{a}f\omega_0[3\pi C(p)+3\pi\mu_1+4\bar{a}\mu_2\omega_0]\sin\bar{\varphi}-9\pi^2f^2>0\tag{28}$$

$$-[C(p)+\mu_1]-4a\mu_2\omega_0<0\tag{29}$$

至此,非零定常解的频率响应方程和稳定性条件已被求出。通过改变式(23)、式(24)中的调谐因子 σ,计算出系统稳态幅值和相位$(\bar{a},\bar{\varphi})$,利用稳定性条件式(28)、式(29)对其进行稳定状态判断,可得到定常解的幅频特性。取一组参数 $\varepsilon=0.1$,$\mu_1=0.3$,$\mu_2=0.3$,$\omega_0=1$,$K=0$,$F=0.01$,经上述步骤得出系统定常解幅频曲线如图 3 所示。由图 3 可见,由于此时系统会同时发生强迫主共振和参激共振,导致系统至多会存在 3 个周期解支,其中 2 支为稳定的解,1 支为不稳定的解。

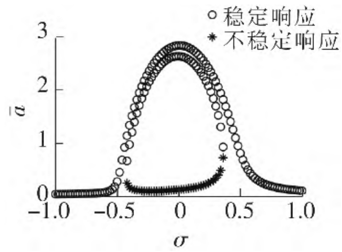
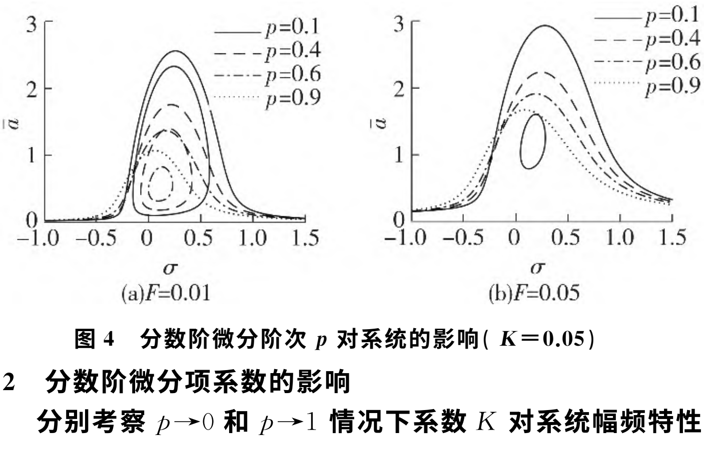


图 3　定常解幅频曲线

3　分数阶微分项对系统的影响

3.1　分数阶微分项阶次的影响

首先考察分数阶微分项阶次对系统动力学特性的影响。取一组基本参数 $\varepsilon=0.1$,$\mu_1=0.3$,$\mu_2=0.3$,$\omega_0=1$,$K=0$,$F=0.01$ 对系统进行仿真计算。分别选取不同阶次 p,利用式(18)计算系统的幅频响应如图 4 所示。从图 4 可以看出,随着分数阶阶次 p 从 0.1 增加至 0.9,系统的稳态响应幅值在逐渐变小,且幅频曲线整体逐渐向低频方向偏移。此外,阶次 p 还改变了幅频曲线的拓扑结构,系统的多值现象逐渐消失。图 5 给出 $F=0.1$ 时阶次 p 对稳态响应共振峰值的影响,可见此时分数阶微分项对共振幅值有着明显的抑制作用。



(a)F=0.01　　(b)F=0.05

图 4　分数阶微分阶次 p 对系统的影响($K=0.05$)

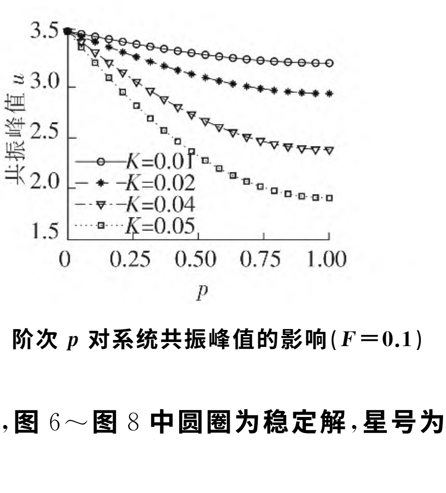


图 5　阶次 p 对系统共振峰值的影响($F=0.1$)

3.2　分数阶微分项系数的影响

分别考察 $p\to 0$ 和 $p\to 1$ 情况下系数 K 对系统幅频特性的影响,图 6～图 8 中圆圈为稳定解,星号为

不稳定解。首先考虑 $p\to1$ 的情况,固定系统参数,依次取系数 K 为 0.01、0.02、0.03 和 0.05,系统幅频曲线随 K 的变化情况如图6所示。为方便比较,图7中给出了系统幅频曲线随线性阻尼系数 μ_1 的变化情况。通过对比图6和图7发现,当分数阶阶次 $p\to1$ 时,随着 K 的逐渐增大,稳态响应的幅值在逐渐缩小,并且 K 达到一定值时,导致系统幅频曲线形态发生变化,由参数激励和强迫激励共同作用引起的多解现象消失,改变了定常解的稳定性。同样地,随着线性阻尼系数 μ_1 逐渐增大,系统的幅频响应曲线发生了类似变化。以上情况说明,阶次 $p\to1$ 时分数阶微分项系数 K 对系统的作用几乎等同于线性阻尼系数 μ_1。

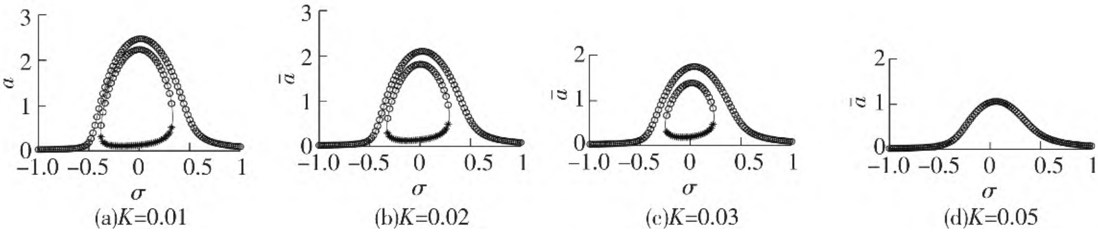


图6 分数阶系数 K 对幅频曲线的影响($p\to1$)

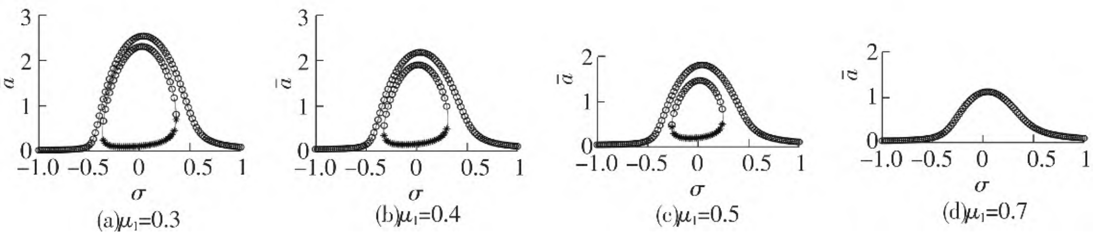


图7 线性阻尼系数 μ_1 对幅频曲线的影响($p=0.6$,$K=0.01$)

下面考虑 $p\to0$ 的情况。其他参数不变,取 $p=0.1$,通过改变系数 K 来观察分数阶微分项对系统幅频特性的影响如图8所示。可以看出,随着分数阶系数 K 的逐渐增大,幅频曲线逐渐向高频方向偏移,改变了系统的共振频率,但系统的响应幅值并未受到明显影响,说明此时分数阶微分项呈现较强的刚度特性。

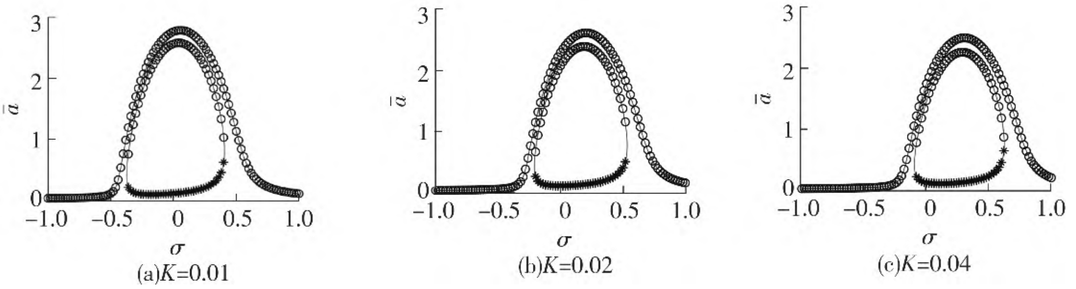


图8 分数阶系数对幅频响应的影响($p\to0$)

4 结论

应用多尺度法研究了强迫激励下分数阶平方阻尼 Mathieu 振子的主共振,建立了定常解的幅频响应方程。利用 Lyapunov 理论分析了系统的幅频特性,由于参数激励和强迫激励的共同作用,在共振区域内稳态响应系统至多存在3个解支。此外,通过数值仿真分析了分数阶微分项对系统幅频曲线的影响,发现改变分数阶微分项的阶次或系数可使其对系统幅频特性产生不同程度的影响:$p\to1$ 时,分数阶微分项呈现出较强的阻尼特性,其对系统的作用几乎等同于线性阻尼,改变系数 K 主要影响系统响应幅值;$p\to0$ 时,分数阶微分项呈现出较强的刚度特性,改变系数 K 主要影响系统的共振频率。以上结果揭示了分数阶微分项(黏弹性器件)在此类系统中的作用规律,验证了其对系统响应特性的作用效果。

参 考 文 献

[1]Rossikhin Y A, Shitikova M V. On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator[J]. Mechanics Research Communications, 2012,45: 22-27.

[2] Petras I. Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.

[3]鲍志超,牛江川,申永军,等. 一类含分数阶微积分时滞微分方程的解的指数估计[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2020,33(1):68-73.

[4]邢武策,陈恩利,常宇健. 具有分数阶特性悬架的垂向振动特性研究[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2021,34(2):105-109.

[5]Cao J, Ma C, Xie H, et al. Nonlinear dynamics of duffing system with fractional order damping[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2010,5(4):1-6.

[6]申永军,杨绍普,邢海军. 含分数阶微分的线性单自由度振子的动力学分析[J]. 物理学报,2012,61(11):158-163.

[7]Shen Y, Yang S, Xing H, et al. Primary resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012,47(9):975-983.

[8]Xu Y, Li Y, Liu D. A method to stochastic dynamical systems with strong nonlinearity and fractional damping[J]. Nonlinear Dynamics, 2016,83(4):2311-2321.

[9]温少芳. 分数阶参激系统的动力学与控制研究[D]. 石家庄:石家庄铁道大学,2018.

[10]陈予恕,徐鉴. Van der pol-Duffing-Mathieu 型系统主参数共振分岔解的普适分类[J]. 中国科学 A 辑,1995,25(12):1287-1297.

[11]丁勇,胡开业,邱敏芝,等. 非线性阻尼下船舶参数激励横摇运动的摄动解法[C]// 全国海事技术研讨会论文集. 上海:上海市海事交流协会,2005.

[12]唐友刚,田凯强,张泽盛,等. 船舶参数激励非线性横摇运动方程[J]. 船舶工程,1998(6):16-18.

Dynamics Analysis of Quadratic Damping Mathieu Oscillator with Fractional-Order Derivative

Guo Jianbin[1], **Shen Yongjun**[1,2]

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;
2.State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: In this research, the primary resonance of quadratic damping Mathieu oscillator with fractional-order derivative under forced excitation was studied. Firstly, the method of multiple scales was used to seek the approximate analytical solution of the primary resonance and its accuracy was verified by numerical method. Moreover, the amplitude-frequency response equation was established, first method based on Lyapunov was used to quantitatively calculate the stability condition of the steady-state response, and the amplitude-frequency responses of the system were analyzed. Finally, the effects of fractional differential term on the amplitude-frequency curves of the system were investigated by numerical simulation. It is found that the fractional differential term has dual regulation functions on the response amplitude and vibration frequency of the system, which is applicable to optimize the system.

Key words: Mathieu oscillator; fractional-order derivative; primary resonance; stability