

基于辛普森数值微分法的成型砂轮廓形设计

黄帅可, 王战中, 孔德逊, 董文杰

(石家庄铁道大学 机械工程学院, 河北 石家庄 050043)

摘要:随着螺杆转子加工精度要求的提高,对磨削转子用成型砂轮廓形设计精度的要求也越来越高。针对此问题,基于转子端面型线数据,运用辛普森数值微分法,并结合累加弦长参数三次曲线法和牛顿迭代法求解砂轮廓形;进而将求解的砂轮廓形与用局部 3 次 B 样条拟合法求解的砂轮廓形进行对比,结果显示用辛普森数值微分法求解的砂轮廓形更准确;随后,采用平均绝对误差和平均绝对百分比误差分别对用辛普森数值微分法和局部 3 次 B 样条拟合法求解的砂轮廓形数值进行误差分析,结果显示用辛普森数值微分法求解砂轮廓形的误差明显小于后者的误差,再次说明用辛普森数值微分法求解砂轮廓形的可行性。

关键词:成型砂轮廓形设计;辛普森数值微分法;累加弦长参数三次曲线法;局部 3 次 B 样条拟合法

中图分类号: TG74+3 **文献标志码:** A **文章编号:** 2095-0373(2022)01-0100-06

双螺杆压缩机具有节能、高效、可靠性强、噪音低等明显优势,更能适应今后压缩机市场的发展需要,其市场需求将远远大于传统压缩机的增长速度,甚至在许多领域开始逐步替代传统压缩机^[1-3]。双螺杆压缩机中的阴、阳转子是其关键核心部件,其加工质量的好坏直接影响着压缩机的性能。

在实际生产加工中,大多数厂家采用离散点数据的形式来表示由多段齿曲线组成的螺杆转子端面型线,但在进行砂轮廓形求解过程中,必须先求出转子端面型线数据点处的一阶导数,求解过程繁琐。赵春秀等^[4]对传统坐标算法进一步推导得到了一种由端面数据点直接求解铣刀廓形的方法,减少了传统求解的计算量;Shen et al^[5]为避免传统齿轮啮合理论中复杂的解析包络过程,提出了一种基于像素解法的成形砂轮廓形计算方法,利用数字图形扫描方法生成螺杆转子与成形刀具之间的磨削轮廓线;He et al^[6]提出利用点向量包络线计算成型砂轮廓形的方法,通过点矢量在包络过程中的空间映射关系完成成型砂轮设计,避开了复杂的数值计算。这些通过复杂推导及数字方法的求解方式虽然也可以得到满足需求的砂轮廓形,但却使得求解复杂化,不便于设计及研究人员理解运用。

以加工双螺杆压缩机螺杆转子的成型砂轮为对象,在传统局部样条法确定边界条件求解一阶导数的前提下,提出利用辛普森数值微分法给定边界条件求解一阶导数并得到成型砂轮的廓形。该方法求解得到的成型砂轮廓形误差较小,无离群值,且在廓形的左右端较为光滑,为设计人员提供了参考。

1 转子螺旋面数学模型的建立

图 1 所示为 4 齿的某型号阳转子三维图及坐标系,每个槽为一空间曲面,此处空间曲面是由端面齿曲线 τ 沿着 z 轴方向作匀速运动,同时绕着 z 轴方向作旋转运动而形成的。如图 1 所示,以螺杆转子的左端面中心为坐标原点建立螺杆转子的直角坐标系 $O-xyz$,3 个坐标轴的单位矢量分别用 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 来表示。

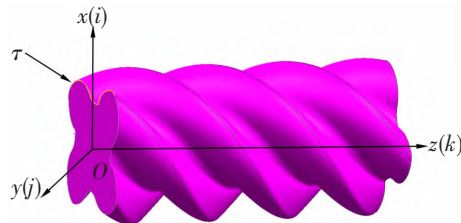


图 1 螺杆转子及坐标系

收稿日期:2021-12-17 责任编辑:车轩玉 DOI:10.13319/j.cnki.sjztdxxbzb.20210269

作者简介:黄帅可(1995—),男,硕士研究生,研究方向为先进制造装备设计及加工技术。E-mail:1445978658@qq.com

黄帅可,王战中,孔德逊,等.基于辛普森数值微分法的成型砂轮廓形设计[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2022,35(1):100-105.

引入参数 t , 端面齿曲线 τ 的参数方程可以表示为

$$\begin{cases} x_t = x_t(t) \\ y_t = y_t(t) \end{cases} \quad (1)$$

根据螺旋面的形成原理, 当螺杆转子端面齿曲线 τ 绕 z 轴转过一个角度 θ , 且以导程 T 沿着 z 轴移动 $p\theta$ 时, 螺旋面方程^[7]可以表达为

$$\begin{cases} x = x_t(t) \cos \theta - y_t(t) \sin \theta \\ y = x_t(t) \sin \theta + y_t(t) \cos \theta \\ z = p\theta \end{cases} \quad (2)$$

式中, θ 为角度参数, 表示端面齿曲线沿着 z 轴转过的角度, 顺着 z 轴看, 顺时针方向为正; p 为螺旋参数, 表示端面齿曲线绕 z 轴转过单位角度时, 沿着 z 轴方向移动的距离, 其中 $p = T/2\pi$ 。

式(2)为右旋螺旋面方程的表达式, 左旋螺旋面方程的表达式只需在 $p\theta$ 前加上负号即可, 本文以右旋螺旋面为例。由微分几何^[8]知识可求出曲面方程上任意一点 $M(x, y, z)$ 处的法向量 $\vec{n}$ 的分量为

$$\begin{cases} n_x = p \frac{\partial y}{\partial t} \\ n_y = -p \frac{\partial x}{\partial t} \\ n_z = x \frac{\partial x}{\partial t} + y \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial t} \end{cases} \quad (3)$$

由式(3)可以推出

$$n_x y - n_y x = p n_z \quad (4)$$

式(4)为螺旋面的特性方程, 是螺旋面的一个重要的性质, 表示螺旋面上任意一点的坐标 (x, y, z) 与该点处法线坐标轴分量 (n_x, n_y, n_z) 及螺旋参数 p 之间的关系。

2 基于离散点的成型砂轮廓形设计

在实际加工中砂轮与转子的空间位置如图 2 所示, 以转子的左端面中心为坐标原点建立转子坐标系 $O-xyz$, 使 z 轴与其回转轴线重合 (向右为正), x 轴沿着转子与砂轮中心距方向, 其正向指向砂轮轴线; 在砂轮上建立坐标系 $O_c-x_c y_c z_c$, z_c 轴与砂轮的回转轴线重合, x_c 轴与 x 轴重合且方向一致, y_c 与 y 轴由右手定则确定。以上 2 个坐标系是固定的, 不随转子和砂轮运动。

转子与砂轮作相互包络运动, 转子端面型线绕着转子的回转轴作螺旋运动, 在某个位置时, 使得转子与砂轮之间产生一条稳定的接触线 C , 该接触线为空间曲线。

在转子磨削加工过程中, 接触线 C 相对于转子坐标系 $O-xyz$ 是沿着 z 轴正方向作螺旋运动, 形成转子螺旋槽; 相对于砂轮坐标系 $O_c-x_c y_c z_c$, 则是接触线 C 绕着砂轮回转轴作回转运动, 形成砂轮的三维廓形面。

如图 2 所示, 若螺杆转子与砂轮回转轴之间的距离 (中心距) 为 A , z 轴与 z_c 轴之间的夹角 (安装角) 为 ω , 则从转子坐标系 $O-xyz$ 到砂轮坐标系 $O_c-x_c y_c z_c$ 的转换式为

$$\begin{cases} x_c = x - A \\ y_c = y \cos \omega + z \sin \omega \\ z_c = -y \sin \omega + z \cos \omega \end{cases} \quad (5)$$

由图 2 可知, 接触线上的任意接触点 $M(x, y, z)$ 相对于 2 坐标原点的矢径与矢量 $\overrightarrow{OO_c}$ 构成矢量三角形 $\triangle OO_c M$, 其中各个矢量表示为

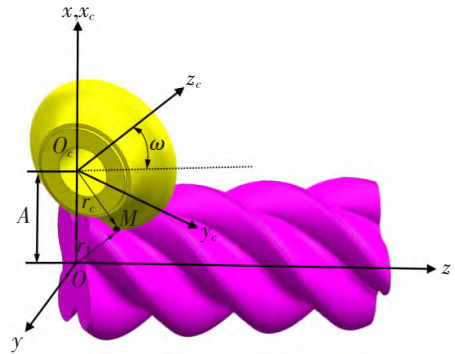


图 2 砂轮与转子坐标转换示意图

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{OM} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{OO_c} = A\vec{i} \\ \vec{r_c} = \vec{O_cM} = (x-A)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{cases} \quad (6)$$

在砂轮与转子作包络运动时,砂轮回转面与转子螺旋面任意一个接触点 M 处的公法线矢量 $\vec{n}$ 与相对运动的速度矢量 $\vec{v}_{12}$ 相互垂直,即两者的点积为零,由此可以得到成型砂轮与转子的接触条件。

在转子实际磨削过程中,由转子磨床的结构决定了转子半成品绕着磨床主轴(与转子 z 轴重合)作回转运动,砂轮绕自身 z_c 轴做回转运动的同时,沿磨床主轴横向移动,二者合成螺旋运动。为了便于建立接触方程,此处设定转子作螺旋运动,即转子绕磨床主轴回转的同时,也作横向移动(沿磨床主轴的移动),砂轮只作绕自身轴线的回转运动。令螺杆转子螺旋面的回转角速度为 $\vec{\omega}_1$,移动速度为 $p\vec{\omega}_1$,成型砂轮的回转角速度为 $\vec{\omega}_c$,则

$$\vec{v}_{12} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + p\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_c \times \vec{r}_c \quad (7)$$

通过解除条件,整理式(6)与式(7)并通过式(4)得

$$n_x z + n_y A \cot \omega + n_z (A - x + p \cot \omega) = 0 \quad (8)$$

令 $k_x = \partial x_i / \partial t$, $k_y = \partial y_i / \partial t$, 并将式(3)代入式(8)中,即可得到转子与砂轮的接触方程表达式

$$(x_i k_x + y_i k_y)(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta - p \cot \omega - A) + p A \cot \omega (k_x \cos \theta - k_y \sin \theta) - p^2 \theta (k_x \sin \theta + k_y \cos \theta) = 0 \quad (9)$$

式(9)中 A 、 ω 和 p 都是常数,而其他值是关于 θ 的函数,所以此超越方程是关于 θ 的方程。通过牛顿迭代法求解该超越方程得到 θ 的值,将求解得到的 θ 代入式(2)中得到对应 θ 的齿面坐标点 (x, y, z) ,将齿面坐标点 (x, y, z) 代入转子与砂轮转换公式(5)中可以得到砂轮回转面上的坐标点 (x_c, y_c, z_c) ,并通过式(10)表示砂轮的端面廓形,具体求解流程如图 3 所示。

$$\begin{cases} R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \\ z_h = z_c \end{cases} \quad (10)$$

式中, R 为砂轮切削圆半径; z_h 为砂轮厚度。

3 接触方程中的一阶导数计算

由接触方程表达式(9)可以看出,求解 θ 角的关键就在于公式中的 2 个偏导数 k_x 和 k_y ,常用来求解一阶导数的方法为累加弦长参数三次曲线法^[9-10]。该方法通过构造累加弦长来替代真实的曲线弧长,将对端面型线数据 (x_i, y_i) 导数的直接求解变为让 x_i 与 y_i 分别对弦长参数 s_i 求偏导,然后将得到的偏导数 k_x 和 k_y 代入接触方程表达式(9)中即可得到 θ 的解,进而得到砂轮的廓形。

在进行偏导数 k_x 和 k_y 求解前,应已知转子首末端点处的一阶导数。传统求解首末端点一阶导数为局部 3 次 B 样条曲线法,即对首末端点处先局部拟合,再对拟合曲线进行求导。该方法得到的导数精度较低,在进行后续砂轮廓形求解时,影响砂轮廓形数值的准确性。辛普森数值微分法在进行数值微分求解时具有较高的准确性,所以采用辛普森数值微分法进行首末端点一阶导数的求解,其公式^[11]为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(x_1) \\ f'(x_2) \\ f'(x_3) \\ \vdots \\ f'(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(y_2 - y_0)/h \\ 3(y_3 - y_1)/h \\ 3(y_4 - y_2)/h \\ \vdots \\ 3(y_n - y_{n-2})/h \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中, y_0 、 y_n 为转子端面型线首末端点的纵坐标; h 为步长, $h = x(2) - x(1)$ 。

由式(11)求得首末端点一阶导数 D_{first} 和 D_{end} 。则累加弦长参数三次曲线法的边界条件为

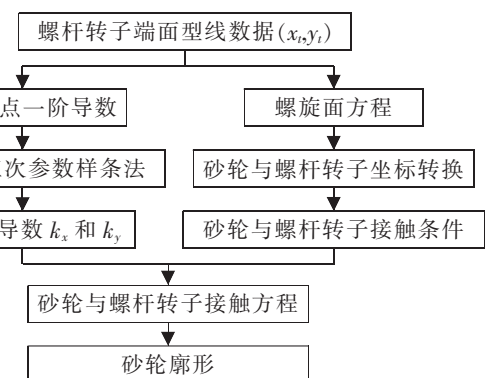


图 3 砂轮廓形求解流程图

$$\begin{cases} k_{x1} = \cos[\arctan(D_{\text{first}})] \\ k_{xn} = \cos[\arctan(D_{\text{end}})] \\ k_{y1} = \sin[\arctan(D_{\text{first}})] \\ k_{yn} = \sin[\arctan(D_{\text{end}})] \end{cases} \quad (12)$$

令 $\mu = h_{j-1}/h_j + h_{j-1}$, $\lambda_j = 1 - u_j$, $g_j = 6[(x_{j+1} - x_j)/h_j - (x_j - x_{j-1})/h_{j-1}]/(h_{j-1} + h_j)$, 根据文献[9]可确定累加弦长参数三次曲线法的求解方程为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中, μ_j 、 λ_j 、 g_j 方程系数涉及的 $h_j = s_{j+1} - s_j$, $s_i = \sum_{t=2}^i \sqrt{(x_t - x_{t-1})^2 + (y_t - y_{t-1})^2}$ 。

利用式(12)和式(13)可分别求得偏导数 k_x 和 k_y , 将偏导数 k_x 和 k_y 代入式(9)中并通过牛顿迭代法确定 θ 的取值, 再由式(2)、式(5)和式(10)得到砂轮端面廓形坐标。

4 实例验证与分析

以某型号双螺杆压缩机阳转子为例, 其中转子与砂轮几何参数如表 1 所示。

表 1 阳转子与砂轮几何参数

导程/mm	砂轮直径/mm	安装角/(°)	中心距/mm	齿数/个
264	200	50.045 1	132.967 5	4

分别利用局部 3 次 B 样条拟合法和辛普森数值微分法进行偏导数 k_x 、 k_y 和砂轮廓形的求解, 并将两者计算得到的结果进行对比。表 2 为局部 3 次 B 样条拟合法、辛普森数值微分法和企业提供的用于实际磨削的砂轮廓形数值。

表 2 2 种方法及实际磨削转子的砂轮廓形值(部分)

mm

序号	局部 3 次 B 样条拟合法(z_h, R)	辛普森数值微分法(z_h, R)	实际磨削转子(z_h, R)
1	(-19.756, 80.176 5)	(-24.253, 76.682 1)	(-24.256, 76.684 2)
2	(-24.895, 76.978 9)	(-24.153, 76.669 4)	(-24.148, 76.669 5)
3	(-23.806, 76.723 2)	(-24.018, 76.652 4)	(-24.022, 76.653 6)
4	(-23.950, 76.731 4)	(-23.895, 76.638 1)	(-23.769, 76.625 7)
⋮	⋮	⋮	⋮

图 4 为 2 种方法求得偏导数 k_x 和 k_y 的对比图, 从图 4 可以看出局部 3 次 B 样条拟合法在首尾两端求解的偏导数有较大跳动, 而辛普森数值微分法求解的结果在首尾两处没有较大的跳动。

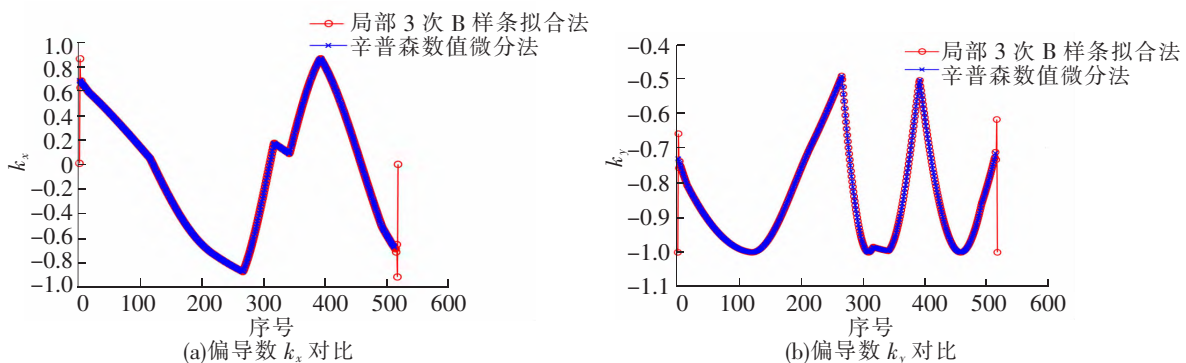


图 4 2 种方法求解的 k_x 和 k_y 对比图

图 5 为用 2 种方法求解出的 z_h 和 R 与企业提供的实际磨削转子的砂轮廓形数值对比的误差图。从

图 5 可以看到用辛普森数值微分法求解的 z_h 和 R 误差小且更光滑,而用局部 3 次 B 样条拟合法求解的 z_h 和 R ,在砂轮廓形线两端有较大误差,需要再次处理,否则影响砂轮制造精度。

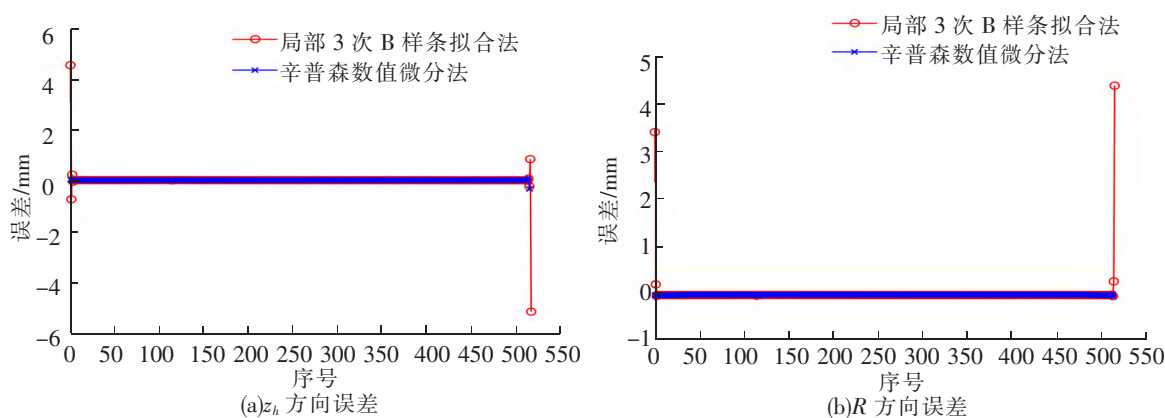


图 5 2 种方法在 z_h 与 R 方向的误差对比图

图 6 为局部 3 次 B 样条拟合法、辛普森数值微分法及实际磨削转子的砂轮廓形。由图 6 可以看到辛普森数值微分法求解的砂轮廓形与实际磨削转子的砂轮廓形近乎完全重合,而局部 3 次 B 样条拟合法求解的砂轮廓形在很多位置与实际磨削转子的砂轮廓形并未重合。

为了更加准确地评估局部 3 次 B 样条拟合和辛普森数值微分法求解出砂轮廓形数值的精确度,采用可以避免误差抵消的平均绝对误差与平均绝对百分比误差来评估 2 种方法求解的砂轮廓形数值与实际磨削转子的砂轮廓形数值的误差。

平均绝对误差(MAE)是所有单个计算值与实际数值偏差的平均绝对值,平均绝对百分比误差(MAPE)则是平均绝对误差的百分比表示形式,两者的计算公式为

$$\begin{cases} \text{MAE} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_{obs} - X_b|}{n} \\ \text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{X_{obs} - X_b}{X_{obs}} \right| \end{cases} \quad (14)$$

式中, X_{obs} 为计算得到的砂轮廓形数值; X_b 为实际磨削转子的砂轮廓形数值,即标准值; n 为数据量总数。

通过式(14)分别计算局部 3 次 B 样条拟合法与辛普森数值微分法 z_h 与 R 方向的 2 种误差,结果如表 3 所示。

表 3 2 种方法的误差结果

方法	z_h 方向 平均绝对误差/mm	R 方向 平均绝对误差/mm	z_h 方向 平均绝对百分比误差/%	R 方向 平均绝对百分比误差/%
局部 3 次 B 样条拟合法	2.4×10^{-2}	1.7×10^{-2}	0.12	0.02
辛普森数值微分法	2.1×10^{-3}	5.4×10^{-4}	0.009 8	0.000 56

显然辛普森数值微分法 z_h 与 R 方向的平均绝对误差和平均绝对百分比误差远远小于局部 3 次 B 样条拟合法,也就是说辛普森数值微分法的误差更小,其计算结果更为准确。

5 结语

以某型号双螺杆压缩机螺杆转子及转子磨削用砂轮为研究对象,基于包络法来确定螺杆转子与成型砂

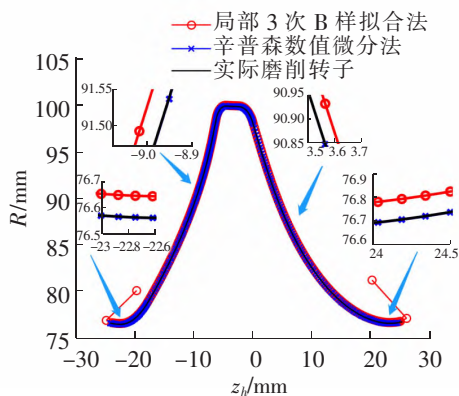


图 6 2 种方法与实际磨削转子的砂轮廓形对比图

轮的接触条件式,分别采用局部 3 次 B 样条拟合法和辛普森数值微分法 2 种方法确定求解一阶导数的边界条件,借助累加弦长参数三次曲线法对接触条件式中关键的一阶导数进行求解,最终得到成型砂轮的廓形。

使用局部 3 次 B 样条拟合和辛普森数值微分法确定的 2 种砂轮廓形分别与企业提供的用于实际磨削转子的砂轮廓形数值进行对比。结果显示,辛普森数值微分法求解的成型砂轮廓形在光顺性和准确性上均优于局部 3 次 B 样条拟合法,这为成型砂轮的设计人员提供了重要的参考价值。

为了更加准确地评估局部 3 次 B 样条拟合和辛普森数值微分法求解出砂轮廓形数值的精确度,引入了平均绝对误差与平均绝对百分比误差,对 2 种方法得到的砂轮廓形数值与企业提供的用于实际磨削转子的砂轮廓形数值的误差大小进行比较。结果显示辛普森数值微分法 z_h 与 R 方向的平均绝对误差和平均绝对百分比误差远远小于局部 3 次 B 样条拟合法。

参 考 文 献

- [1]刘王伟,刘妍,钱家祥. 空气动力用螺杆压缩机应用现状分析[J]. 压缩机技术,2013(3):66-68.
- [2]陈文卿,沈九兵,邢子文. 国内螺杆式制冷压缩机行业现状与发展趋势[J]. 制冷与空调,2012,12(2):90-94.
- [3]王宗明. 压缩机[M]. 北京:中国石化出版社,2012.
- [4]赵春秀,刘建宁. 螺杆加工成型铣刀廓形坐标计算方法[J]. 机械设计,2008(6):69-70.
- [5]Shen Zhihuang, Yao Bin, Teng Weibin, et al. Generating grinding profile between screw rotor and forming tool by digital graphic scanning (DGS) method[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing,2016,17(1):35-41.
- [6]He Kun, Li Guolong, Du Yanbin, et al. A digital method for calculation the forming cutter profile in machining helical surface [J]. International Journal of Mechanical Sciences,2019,55:370-380.
- [7]张元勋,唐倩,江振伟,等. 基于啮合间隙的螺杆齿形设计与成形加工方法[J]. 机械工程学报,2014,50(9):48-57.
- [8]周振荣,杨文茂,郑高峰,等. 微分几何[M]. 武汉:武汉大学出版社,2008.
- [9]李庆扬,王能超,易大义. 数值分析[M]. 北京:清华大学出版社,2008.
- [10]朱其芳,徐利军,李惊雷. 加工由离散点组成截形的螺杆转子用铣刀廓形的计算[J]. 压缩机技术,1996,4(6):10-14.
- [11]王正林,龚纯,何倩. 精通 MATLAB 科学计算[M]. 3 版. 北京:电子工业出版社,2012.

Profile Design of Formed-Grinding Wheel Based on the Simpson Numerical Differential Method

Huang Shuaike, Wang Zhanzhong, Kong Dexun, Dong Wenjie

(School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: With the improvement of the machining precision of the screw rotor, the accuracy of profile design of the formed-grinding wheel used for grinding the screw rotor becomes higher and higher. In order to solve this problem, based on the rotor profile data, the profile of formed-grinding wheel was solved with the Simpson numerical differentiation method, combined with the cumulative chord parameter cubic curve method and the newton iteration method in this paper. Then, the profile of formed-grinding wheel calculated with Simpson numerical differentiation method was compared with that calculated with method of local cubic B-spline fitting, and the results showed that the former was more accurate. At the end, the method of mean absolute deviation and the method of mean absolute percentage error were used to analyze the errors of the profile of formed-grinding wheel designed with the method of local cubic B-spline fitting and the Simpson numerical differential method respectively, the results show that the error of formed-grinding wheel calculated with Simpson numerical differential method is smaller than that calculated with the method of local cubic B-spline fitting, so it is feasible to solve the profile of formed-grinding wheel with Simpson numerical differential method.

Key words: profile design of formed-grinding wheel; Simpson numerical differential method; cumulative chord length parameter cubic curve method; method of local cubic B-spline fitting