

一类常微分方程的解及其应用

吕桂稳, 王雅茹, 薛志群

(石家庄铁道大学 数理系, 河北 石家庄 050043)

摘要:基于某些教材中给出的微分方程通解、特解的定义,阐述了通解和特解的关系,给出了求非齐次一阶线性微分方程特解的一个方法,利用此方法得到了非线性碰撞振子的 Melnikov 函数,解决了这个系统出现混沌的条件。

关键词:常微分方程; 通解; Melnikov 方法; 混沌

中图分类号:O13 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-0373(2021)02-0123-04

0 引言

17 世纪,微积分出现之后,常微分方程随之出现。从它诞生之日起,求解就是微分方程的重要任务。微分方程发展初期,主要是对具体方程用初等函数或超越函数表示其解,属于“求通解”时代。1841 年,由于 Liouville 证明了 Riccati 方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ 不存在一般初等解和 Cauchy 初值问题的提出,常微分方程从“求通解”转到“求定解”时代。19 世纪末,由于天体力学中太阳系稳定性问题需要研究常微分方程解的大范围性态,从而常微分方程转到“求所有解”时代。20 世纪 70 年代以后,随着计算机技术的发展,计算速度大幅度提升,常微分方程进入了“求特殊解”时代^[1]。

然而在现代微分方程的研究与应用中,很少求微分方程的通解或所有解。一是因为只有少数微分方程可以求出其通解或所有解,二是有些问题不需要通解或所有解。但是对初学者尤其是非数学专业的学生来说,微分方程的解的概念还是非常重要的。因此,在一些通用教材中仍把微分方程的通解、所有解、特解等作为基本概念来一一介绍。

1 微分方程的通解、所有解、特解等基本概念及其关系

文献[1]中有这样的定义:对于 n 阶常微分方程

$$F(x, y, y', L, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

如果将函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程(1)后,能使它变为恒等式,则称 $y = \varphi(x)$ 为方程(1)的解。

含有 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 的解 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 称为 n 阶方程(1)的通解。

把满足初值条件的解称为微分方程的特解^[1]。

文献[2]中对微分方程通解的定义是这样的:设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数,如果在区间 I 上 $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), L, \varphi^{(n)}(x)) = 0$,则称函数 $y = \varphi(x)$ 是微分方程的解。如果微分方程的解中含有任意常数,且相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,那么确定了通解中的任意常数以后,就得到微分方程的特解^[2]。

文献[1]、文献[2]中对通解的定义是一致的,而且在本质上特解都是利用通解,通过初始条件确定的。然而对于一个微分方程来讲,大多数情况下它的解并不唯一,那么使某个微分方程成为恒等式的全部函数,称为这个方程的所有解。一个微分方程的解、通解、特解及所有解具有如下关系。

收稿日期:2020-06-29 责任编辑:车轩玉 DOI:10.13319/j.cnki.sjztdxxbzb.20200099

基金项目:河北省高等学校技术基金项目(ZD2019047);河北省教育厅高等教育教学研究与实践(2019GJJG237)

作者简介:吕桂稳(1974—),女,博士,讲师,研究方向为非线性泛函分析、金融工程与风险管理。E-mail:lvguiwenyy@126.com

吕桂稳,王雅茹,薛志群.一类常微分方程的解及其应用[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2021,34(2):123-126.

定理 1 通解、特解都是微分方程的解,但微分方程的通解未必是它所有解。

情形 1 对微分方程进行变形的过程中可能会丢掉解,致使通解不是所有解。

例 1 解方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{6}{x}y = -xy^2$ 。

这是 $\alpha=2$ 的伯努利方程,经计算得它的通解为: $y = \frac{8x^6}{x^8 + C}$, 其中, C 为任意常数。此外, $y=0$ 也是原方程的解。

情形 2 对微分方程进行变形过程中,丢掉的解会通过通解中任意常数的选取又补回来,这时候通解又是所有解了。

例 2 求微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的所有解,其中 $P(x)$ 是连续函数。

解:当 $y \neq 0$ 时,由分离变量法得方程的通解 $y = C \exp\left(-\int P(x)dx\right)$ ($C > 0$)。

显然 $y=0$ 是原方程的解,因此原方程的所有解为 $y = C \exp\left(-\int P(x)dx\right)$, 其中, C 为任意常数。

注:当 $C=0$ 时, $y=0$ 。因此 $y = C \exp\left(-\int P(x)dx\right)$, C 为任意常数,包含了 $y=0$ 这个解。

由情形 1、2 可知,变量可分离的方程,齐次型和准齐次型方程,伯努利方程等在解方程的过程中要进行变形,因此它们的通解可能不是所有解。而对于全微分方程、常系数线性齐次和非齐次方程的通解都是所有解。

情形 3 方程的解既不是通解也不是特解,又不包含在通解中。

例 3 求解微分方程 $(y' - 1)(y'' - 1) = 0$ 。

解:显然 $y = x + C$ 和 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ 都是它的解,由定义, $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ 是微分方程的通解,而 $y = x + C$ 既不是通解也不是特解。

定理 2 微分方程通解中的任意常数是指在一定范围内的“任意”。

例 4 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$ ($y > 0$)。

若取积分因子 $\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 得到上述方程的通解为 $\sqrt{x^2 + y^2} - x = C$, 其中, C 就不是任意的实数,只能取大于 0 的任意常数。

定理 3 满足初值问题的特解不一定唯一。

例 5^[3] 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$ 在满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解。

解:容易求得此方程的通解为 $y = \sin(x + C)$, 当 $x = 0$ 时, $C = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 其中, $k = 0, \pm 1, \pm 2L$ 。

因此方程的特解为 $y = \sin\left(x + 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, 其中, $k = 0, \pm 1, \pm 2L$ 。

2 一阶非齐次线性微分方程特解的一个求法及其应用

一般情况下,求初值问题的特解,需要求出方程的通解,根据初值条件确定任意常数,从而得到特解。但是有些方程要具体问题具体分析。

例 6 证明一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$, 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的情况下,它的特解为

$$y = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(x)dx\right) \left[\int_{x_0}^x Q(x) \exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right) dx + y_0 \right] \quad (2)$$

证明:对方程两边同时乘以 $\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)$, 得 $\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)y' + \exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)P(x)y = Q(x)\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)$ 。即 $\frac{d}{dx}\left[\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)y\right] = Q(x)\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)$ 。

对此式两边从 x_0 到 x 做积分 $\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)y \Big|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x Q(x)\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)dx$, 即 $\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)y - \exp\left(\int_{x_0}^{x_0} P(x)dx\right)y_0 = \int_{x_0}^x Q(x)\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)dx$ 。

整理得 $y = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(x)dx\right)\left[\int_{x_0}^x Q(x)\exp\left(\int_{x_0}^x P(x)dx\right)dx + y_0\right]$ 。作为式(2)的一个应用,求解下面的方程^[4]。

例 7 求方程 $\frac{d\sigma_1^{m,+}(t)}{dt} = \frac{g[x_0^h(t-t_0)]}{y_0^h(t-t_0)}\sigma_1^{m,+}(t) + f[t, x_0^h(t-t_0), y_0^h(t-t_0)]$, 其中 $\frac{dg(x_0^h(t))}{dt} = y_0^h(t)$, 就运用了此公式。

解:令 $x_0 = t_0 + \frac{1}{2}T_{h_m}$, 则 $y(x_0) = \sigma_1^{m,+}(t_0 + \frac{1}{2}T_{h_m})$, 将 $P(t) = \frac{g[x_0^h(t-t_0)]}{y_0^h(t-t_0)}$, $Q(t) = f[t, x_0^h(t-t_0), y_0^h(t-t_0)]$ 代入式(1)得 $\sigma_1^{m,+}(t) = \exp\left(-\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t P(t)dt\right)\left[\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t Q(t)\exp\left(-\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t P(t)dt\right)dt + \sigma_1^{m,+}\left(t_0 + \frac{1}{2}T_{h_m}\right)\right]$, 从而

$$\sigma_1^{m,+}\left(t_0 + \frac{1}{2}T_{h_m}\right) = \exp\left(-\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t P(t)dt\right)\sigma_1^{m,+}(t) + \int_t^{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}} Q(t)\exp\left(\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t P(t)dt\right)dt \quad (3)$$

因为 $\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t P(t)dt = -\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t \frac{g[x_0^h(t-t_0)]}{y_0^h(t-t_0)}dt = \int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t \frac{dy_0^h(t-t_0)}{y_0^h(t-t_0)} = \ln y_0^h(t-t_0) - \ln y_0^h\left(\frac{1}{2}T_{h_m}\right)$, 所以 $\exp\left(\int_{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}}^t P(t)dt\right) = \frac{y_0^h(t-t_0)}{y_0^h\left(\frac{1}{2}T_{h_m}\right)}$ 。

由式(3)可知,原方程的解为 $\sigma_1^{m,+}\left(t_0 + \frac{1}{2}T_{h_m}\right) = \frac{y_0^h(t-t_0)}{y_0^h\left(\frac{1}{2}T_{h_m}\right)}\sigma_1^{m,+}(t) + \frac{1}{y_0^h\left(\frac{1}{2}T_{h_m}\right)}\int_t^{t_0+\frac{1}{2}T_{h_m}} f(\tau, x_0^h,$

$y_0^h)$ $d\tau$ 。

注:由这个方程的解,即式(3),得到了次谐 Melnikov 函数,从而用 Melnikov 方法,得到了非线性碰撞系统

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = \epsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \epsilon\right) & |x| < 1 \\ \frac{dx}{dt} \rightarrow (1-\epsilon\rho)\frac{dx}{dt} & |x| = 1 \end{cases} \quad (4)$$

出现混沌的条件^[4]。

参 考 文 献

- [1]王高雄,周之铭,朱思铭. 常微分方程 [M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2006.
- [2]同济大学应用数学系. 高等数学(下册) [M]. 5 版. 北京:高等教育出版社,2014.
- [3]朱建民,李建平. 高等数学[M]. 北京:高等教育出版社,2007.
- [4]Du Zhengdong, Li Yurong, Zhang Weinian. Type I periodic motions for nonlinear impact oscillators[J]. Nonlinear Analysis, 2007,67:1344-1358.

Solutions of Ordinary Differential Equations and Their Applications

Lv Guiwen, Wang Yaru, Xue Zhiqun

(Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: This paper expounds the relationship between general solution and special solution, based

on the definition of general solution and special solution of differential equation given in some textbooks. It gives a method of special solution of non-homogeneous first-order linear differential equation, and gives an application of this method, that is, getting a Melnikov function of nonlinear collision oscillator, so as to solve the condition of chaos in this system.

Key words: ordinary differential equation; general solution; Melnikov method; chaos

~~~~~  
(上接第 98 页)

## Application of LLC Resonance Technology in Single-Phase Inverter of EMU

Yuan Lutao, Wang Shuohe, Zhang Binghua

(School of Electrical and Electronic Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract:** In the traditional on-board isolated single-phase inverter of electric multiple units, the isolated booster DC/DC converter that provides DC input for the inverter circuit uses a pulse-width modulation (PWM) phase-shifted full-bridge converter. It has the disadvantages such as large switching loss and low conversion efficiency. In view of the above problems, a method of adopting full-bridge LLC resonant soft switching technology in a DC/DC boost power supply of a vehicle single-phase inverter was proposed. First, the full-bridge LLC converter was modeled, and its working principle and parameter design method were analyzed; the feasibility of theoretical parameters was verified by Matlab/Simulink simulation; finally, a 2.5 kW pulse frequency modulation was produced according to the design parameters (PFM)'s full-bridge LLC resonant converter experimental prototype. The experimental results show that the rated input voltage of the prototype is DC110 V, the output voltage of the LLC resonant converter can be kept constant at DC400 V, which can provide a stable DC input for the inverter circuit of the subsequent stage and realize Pass (ZVS) in full-loaded scope, which effectively improves the efficiency of isolated booster power supply.

**Key words:** LLC resonant converter; zero-voltage switching; isolated single-phase inverter