

# 具有分数阶特性悬架的垂向振动特性研究

邢武策<sup>1</sup>, 陈恩利<sup>1,2</sup>, 常宇健<sup>3</sup>

(1. 石家庄铁道大学 机械工程学院, 河北 石家庄 050043;

2. 石家庄铁道大学 省部共建交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室, 河北 石家庄 050043;

3. 石家庄铁道大学 电气与电子工程学院, 河北 石家庄 050043)

**摘要:**选取含分数阶微分项的1/4车辆动力学模型为研究对象,应用拉氏变换法推导出车身加速度、轮胎动载荷和悬架动挠度3个性能指标的频响函数,分析了分数阶微分项参数对悬架振动特性的影响。结果表明,分数阶项参数会影响悬架振动幅频响应特性。应用数值方法计算出非线性悬架系统车身振动幅频响应曲线,研究发现振动幅值随分数阶微分项参数值的增加而减小,悬架动力学性能提高。

**关键词:**分数阶微分;二自由度悬架;垂向动力学

**中图分类号:**U461.1 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-0373(2021)02-0105-05

组成悬架的机械结构中,像空气弹簧、磁流变减振器等减振部件具有黏弹性本构关系,相比于传统的整数阶模型,分数阶模型更能准确地描述黏弹性减振器的力学特性,反映悬架变形与受力之间的关系。

樊明辉等<sup>[1]</sup>对含分数阶微分的二自由度线性悬架模型在简谐激励下的幅频特性进行了解析和数值分析,并讨论了分数阶微分项系数和阶次对系统幅频响应曲线的影响。陈炎冬等<sup>[2]</sup>研究了由分数阶磁流变阻尼和非线性弹簧组成的复杂车辆悬架系统的减振控制。李占龙等<sup>[3]</sup>建立了考虑几何参数的分数阶Kelvin-Voigt黏弹性悬架模型,研究了悬架系统的减振特性。游浩等<sup>[4]</sup>利用粒子群算法研究了被动分数阶汽车悬架参数的优化设计。盖盼盼等<sup>[5]</sup>研究了具有频率依赖性的黏弹性阻尼隔振系统的动力特性及优化设计。王军等<sup>[6]</sup>研究了含分数阶微分单自由度分段光滑系统的振动特性。Yuvapriya et al<sup>[7]</sup>采用分数阶滑模控制在Matlab/Simulink软件中研究了悬架的振动性能。现主要研究含分数阶微分的悬架系统在简谐激励下的动力学响应特性,并分析分数阶微分项参数对悬架系统垂向振动特性的影响。

## 1 含分数阶微分的悬架系统动力学模型

具有分数阶微分特性的1/4车辆二自由度非线性悬架模型如图1所示。根据牛顿第二定律,可得到悬架系统的运动微分方程

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_k + h D_t^p (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 x_2 - x_0 - F_k - h D_t^p (x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, $m_1$ 、 $m_2$ 分别为车身、轮胎的质量; $c_1$ 为悬架阻尼系数; $h$ 为分数阶微分项系数; $p$ 为分数阶微分项阶次且满足 $0 < p < 1$ ;  $F_k$ 为悬架弹簧的非线性弹性恢复力,表达式为 $F_k = k_1(x_1 - x_2) + k_3(x_1 - x_2)^3$ ,其中, $k_1$ 和 $k_3$ 为非线性弹簧力系数; $x_0$ 、 $x_1$ 和 $x_2$ 分别为路面激励输入( $x_0 = \cos \omega t$ )、车身位移和轮胎位移。在分析过程中悬架系统中各参数取值如表1所示。

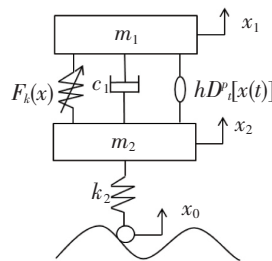


图1 含分数阶微分1/4悬架模型

收稿日期:2020-05-27 责任编辑:车轩玉 DOI:10.13319/j.cnki.sjztdxxbzb.20200076

作者简介:邢武策(1993—),男,硕士研究生,研究方向为车辆动力学。E-mail:2968638589@qq.com

邢武策,陈恩利,常宇健.具有分数阶特性悬架的垂向振动特性研究[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2021,34(2):105-109.

表 1 悬架模型各参数取值

| 悬架参数 | $m_1/\text{kg}$ | $m_2/\text{kg}$ | $k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$ | $k_2/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$ | $k_3/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$ | $c_1/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$ | $h$   | $p$ |
|------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------|-----|
| 数值   | 240             | 30              | 16 000                               | 160 000                              | 10 000                               | 1 000                                               | 1 000 | 0.5 |

以下研究内容均采用表 1 中所示悬架模型参数。

## 2 含分数阶悬架系统垂向振动特性分析

本节对含分数阶微分的悬架系统在路面简谐激励条件下的幅频响应特性进行分析,并讨论分数阶微分参数对系统性能的影响。将图 1 中的非线性悬架模型进行简化处理为线性悬架系统,即参数  $k_3=0$ 。根据汽车理论知识<sup>[8]</sup>,选取车身垂向振动加速度、轮胎动载荷和悬架动挠度为评价悬架系统振动特性的性能指标,对线性化后的悬架运动微分方程进行拉普拉斯变换,可得出系统各性能指标的幅频响应特性。

### 2.1 悬架垂向振动幅频特性

考虑线性悬架系统,即参数  $k_3=0$ 。对式(1)进行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 x_1 + j\omega c_1(x_1 - x_2) + k_1(x_1 - x_2) + j^p\omega^p h(x_1 - x_2) = 0 \\ -m_2\omega^2 x_2 + j\omega c_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - x_0) - k_1(x_1 - x_2) - j^p\omega^p h(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

车身垂向振动加速度相对路面速度的频率响应函数为

$$H_A(\omega) = \left| \frac{\dot{\hat{x}}_1}{\dot{\hat{x}}_0} \right| = \omega \left| \frac{k_2 B}{AC - B^2} \right| \quad (3)$$

路面的保持性由轮胎的动态接触力描述。轮胎动载荷相对路面速度的频率响应函数为

$$H_D(\omega) = \left| \frac{k_2(\hat{x}_2 - \hat{x}_0)}{\dot{\hat{x}}_0} \right| = \frac{1}{\omega} \left| k_2 \left( \frac{k_2 A}{AC - B^2} - 1 \right) \right| \quad (4)$$

悬架动挠度相对路面位移的频率响应函数为

$$H_N(\omega) = \left| \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{\hat{x}_0} \right| = \left| \frac{k_2 B - k_2 A}{AC - B^2} \right| \quad (5)$$

式中,符号“ $\sim$ ”表示拉普拉斯变换; $A = -m_1\omega^2 + j\omega c_1 + k_1 + j^p\omega^p h$ ;  $B = j\omega c_1 + k_1 + j^p\omega^p h$ ;  $C = -m_2\omega^2 + j\omega c_1 + k_2 + k_1 + j^p\omega^p h$ 。

### 2.2 参数影响分析

将表 1 中的悬架系统参数作为基本参数,改变其中分数阶微分项的系数  $h$  和阶次  $p$ ,分析其对悬架车身加速度、轮胎动载荷和悬架动挠度的影响。分析结果如图 2~图 4 所示(路面激励幅值  $A=0.01 \text{ m}$ )。

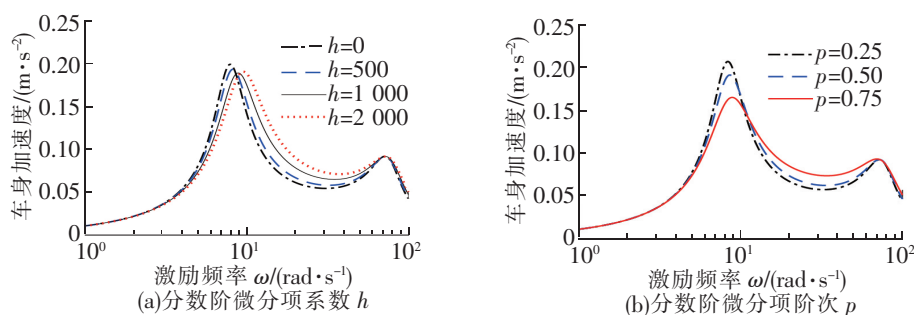


图 2 分数阶微分参数对车身加速度幅频特性影响

图 2 所示为分数阶微分项系数  $h$  和阶次  $p$  对车身加速度幅频特性的影响。由图 2 可知,分数阶微分项系数  $h$  增加,幅频曲线左侧峰值先减小后增加,两峰之间的幅值一直增加,对右侧峰值影响很小;分数阶微分项阶次  $p$  增加,幅频曲线左侧峰值减小,对右侧峰值影响也很小,当激励频率大于一定值时,车身加速度幅值随阶次的增加而增加。

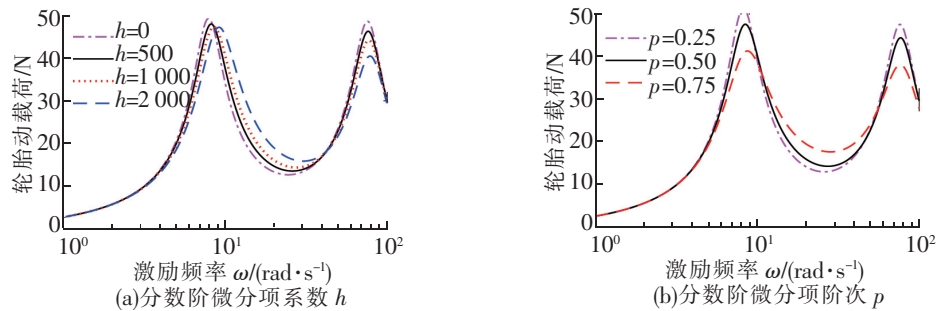


图 3 分数阶微分项参数对轮胎动载荷幅频特性影响

图 3 所示为分数阶微分项系数  $h$  和阶次  $p$  对轮胎动载荷幅频特性的影响。由图 3 可知,随着分数阶微分项系数  $h$  增加,左侧峰值先减小后增加,右侧峰值减小;随着分数阶微分项阶次  $p$  的增加,两侧峰值都在减小,而两峰之间数值在增加。

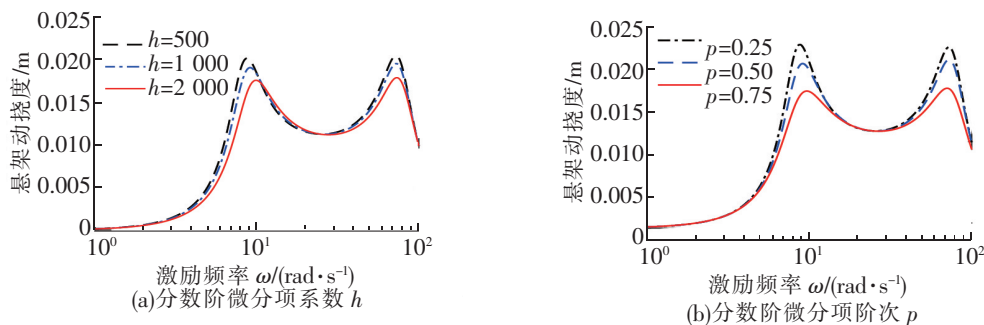


图 4 分数阶微分项参数对悬架动挠度幅频特性影响

图 4 所示为分数阶微分项系数  $h$  和阶次  $p$  对悬架动挠度幅频特性的影响。由图 4 可知,随着分数阶微分项系数  $h$  和阶次  $p$  的增加,悬架动挠度幅频曲线的两侧峰值均在减小。可见,通过分数阶微分项系数和阶次可降低悬架挠度高频和低频的振动幅值,但对中频幅值影响较小。

通过以上分析可知,分数阶微分项的系数和阶次改变会影响系统的刚度和阻尼,进而影响悬架系统的性能。

### 3 非线性悬架车身振动特性

汽车悬架系统的机械结构,如悬架弹簧、阻尼器和轮胎中包含各种非线性因素,当系统中存在非线性因素时,会产生混沌、分岔等复杂的非线性动力学现象,考虑系统中的非线性因素具有实际意义,因此,应对具有非线性结构车辆悬架的振动特性进行研究。本节以图 1 中二自由度 1/4 悬架系统为研究对象,采用数值方法分析考虑非线性因素条件下分数阶微分项参数对车身振动幅频特性的影响。

采用幂级数展开法对悬架系统运动微分方程(1)进行数值计算。首先,将微分方程写为状态方程的形式

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 - z_4 \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{m_2} [k_1 z_0 - k_1 z_3 - k_2 z_1 - k_3 z_1^3 - c_1 (z_2 - z_4) - h z_5] \\ \frac{dz_3}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_4}{dt} = \frac{1}{m_1} [c_1 (z_2 - z_4) + k_2 z_1 + k_3 z_1^3 + h z_5] \\ \frac{d^\alpha z_5}{dt^\alpha} = z_2 - z_4 \quad (\alpha = 1 - p) \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $z_1$  为悬架车身与轮胎的相对位移;  $z_2$  为轮胎的运动速度;  $z_3$  为轮胎的运动位移;  $z_4$  为车身的运动速度;  $z_5$  为分数阶微分项。

通过幂级数展开法(PSE)对分数阶微分项进行处理,该方法的计算公式(对分数阶微分项的离散化过程)为

$$D^p[x(t_l)] \approx h^{-p} \sum_{j=0}^l C_j^p x(t_{l-j}) \quad (7)$$

式中,  $t_l$  为系统的时间采样点,  $t_l = lh$ ,  $h$  为迭代的步长;  $C_j^p$  为分数阶微分项的二次项系数且具有如下的迭代关系

$$\begin{cases} C_0^p = 1 \\ C_j^p = \left(1 + \frac{1+p}{j}\right) C_{j-1}^p \end{cases} \quad (8)$$

对系统状态方程式(6)进行离散化处理,并通过 Matlab 软件进行数值迭代计算。在数值迭代计算过程中,迭代步长为 0.000 1,计算总时间为 400 s,将计算结果的前 80%(320 s)忽略,将后 20%(80 s)中的最大值作为系统响应的稳态幅值,激励频率变化步长为 1 rad/s。为了验证式(6)中数值迭代方法的正确性,以车身位移为例,参数  $k_3 = 0$ ,分别从数值和解析角度画出其稳态响应的幅频特性曲线。其中,车身位移的解析解表达式根据式(2)可得

$$X_1(\omega) = \left| \frac{k_2 B}{AC - B^2} \right| \quad (9)$$

解析解与数值解的对比结果如图 5 所示。

由图 5 可知,数值解与解析解吻合很好,说明数值迭代计算结果精度较高。

讨论非线性项系数  $k_3$  取值分别为 245 000、285 000、355 000 (非线性参数  $k_3$  的选取参考文献[9])时,车身振动位移的幅频响应曲线(悬架系统中其他参数均取表 1 中数值)。

由图 6 可知,随着悬架非线性系数  $k_3$  值增加,车身位移幅频响应曲线的峰值向上向右移动,曲线出现跳跃多解现象,不稳定幅值所对应的频率范围增加。此外,由图 6 可看出非线性系数  $k_3$  只对振动峰值产生影响,高频范围的振动幅值未受非线性系数  $k_3$  的影响。由于数值扫频过程中只能计算出系统的稳态解,所以不稳定的解未能画出。

以下讨论当非线性参数  $k_3 = 355 000$  条件下,分数阶微分项系数  $h$  和阶次  $p$  对车身位移幅频响应曲线的影响。分析结果如图 7 和图 8 所示。

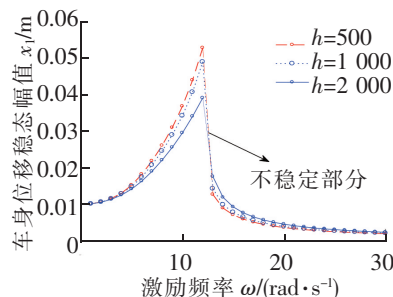


图 7 分数阶微分项系数  $h$  对车身位移幅频响应曲线影响

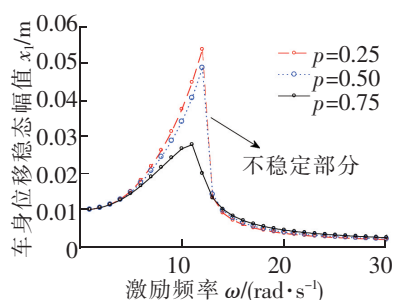


图 8 分数阶微分项阶次  $p$  对车身位移幅频响应曲线影响

由图 7 可知,随着分数阶微分项系数的增加,车身振动幅值减小,说明悬架系统的等效阻尼增加,幅频响应曲线的弯曲程度提高,说明悬架系统的等效刚度增加。可见,分数阶微分项系数  $h$  的增加,会使系统中的等效刚度和等效阻尼增加。

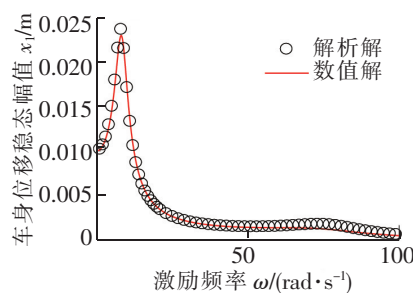


图 5 车身位移幅频响应曲线

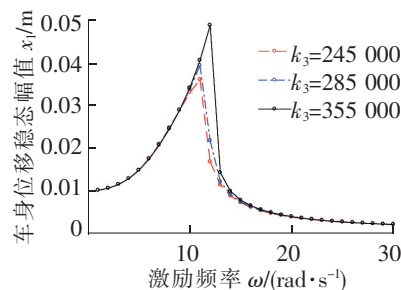


图 6 非线性参数  $k_3$  变化对悬架车身位移幅频响应曲线影响

由图 8 可知,随着分数阶微分项阶次  $p$  的增加,车身振动幅值减小,曲线的弯曲程度降低,当阶次  $p$  大于一定数值时,曲线中不再存在跳跃和多解的现象。研究表明,分数阶微分项阶次  $p$  的提高会增加系统中的等效阻尼,图 8 中阶次  $p$  增加,振动幅值减小符合规律。

## 4 结论

本文研究了含分数阶微分二自由度  $1/4$  悬架系统在简谐激励条件下的垂向振动特性。

(1)针对忽略非线性因素的线性悬架模型,通过分析分数阶项参数对悬架车身加速度、轮胎动载荷和悬架动挠度幅频特性的影响发现,分数阶微分项的系数和阶次改变会影响悬架系统幅频特性的共振峰值和共振频率。

(2)针对考虑非线性因素的悬架系统,通过分析发现分数阶微分项参数变化会改变悬架系统的刚度和阻尼,进而影响车身振动的幅频特性,包括振动峰值、振动的固有频率和曲线的弯曲程度。

## 参 考 文 献

- [1]樊明辉,申永军,杨绍普.含分数阶微分的二自由度悬架系统动力学分析[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2015,28(1):86-90,95.
- [2]陈炎冬,陈宁,杨敏,等.对分数阶非线性悬架的遗传优化  $PI\lambda D\mu$  控制[J].现代制造工程,2019(1):13-17,150.
- [3]李占龙,孙大刚,宋勇,等.基于分数阶导数的黏弹性悬架减振模型及其数值方法[J].振动与冲击,2016,35(16):123-129.
- [4]游浩,申永军,杨绍普.基于粒子群算法的被动分数阶汽车悬架参数优化设计[J].振动与冲击,2017,36(16):224-228.
- [5]盖盼盼,徐赵东,吕令毅,等.黏弹性阻尼隔振系统动力分析与优化设计[J].振动与冲击,2019,38(1):246-250.
- [6]王军,申永军,杨绍普,等.一类分数阶分段光滑系统的非线性振动特性[J].振动与冲击,2019,38(22):216-223.
- [7]Yuvapriya T, Lakshmi P, Rajendiran S. Vibration suppression in full car active suspension system using fractional order sliding mode controller[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2018, 40(4): 217.
- [8]余志生.汽车理论[M].6版.北京:机械工业出版社,2018.
- [9]李韶华,杨绍普.具有滞后非线性的汽车悬架中的混沌[J].振动测试与诊断,2003,23(2):10-13,65.

## Vertical Vibration Characteristics of Suspension with Fractional Order Characteristics

Xing Wuce<sup>1</sup>, Chen Enli<sup>1,2</sup>, Chang Yujian<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

2. State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

3. School of Electrical and Electronic Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract:** In this paper, the  $1/4$  vehicle dynamics model with fractional micro items is selected as the research object. The frequency response functions of acceleration, dynamic load of tire and dynamic deflection of suspension were derived by Laplace transform, and the influence of fractional differential item parameters on suspension vibration characteristics was analyzed. The results show that the fractional order parameters affect the amplitude frequency response of suspension vibration. The response curve of vehicle body vibration amplitude frequency of nonlinear suspension system is calculated by numerical method. It is found that the vibration amplitude decreases with the increase of parameter value of fractional differential term, and the dynamic performance of suspension is improved.

**Key words:** fractional differential; two degree-of-freedom suspension; vertical dynamics