第 33 卷 第 4 期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 4
2020 年 12 月 Journal of Shijiazhuang Tiedao University(Natural Science Edition) Dec. 2020

基于量纲分析法的地运动折合位移势规律研究

何 增[1]， 浦锡锋[1]， 王海兵[1]， 王智环[1,2]， 田 宙[1]

(1.西北核技术研究所，陕西 西安 710024；2.清华大学 工程物理系，北京 100084)

摘要：地运动折合位移势是空腔解耦爆炸、应力波传播、地下爆炸、地震耦合效应等研究中的重要物理量。将数值计算与量纲分析相结合，分析了折合位移势关于载荷和材料模型参数的依赖关系，建立了一定条件下折合位移势的经验估算公式，并使用最小二乘法和牛顿迭代法拟合得到了待定系数。该公式定量地反映了折合位移势与空腔半径、压力峰值、作用时间、介质密度、屈服强度和弹性模量之间的函数关系，计算值与程序的模拟值吻合较好，可为折合位移势的预测提供有效参考。在此基础上讨论了折合位移势的变化规律。

关键词：量纲分析；折合位移势；最小二乘法；规律研究

中图分类号：O303；O344.3 文献标志码：A 文章编号：2095-0373(2020)04-0115-10

0 引言

折合位移势在应力波理论、地下爆炸现象学和地震学等领域具有广泛的应用背景[1]。李孝兰[2]较为系统地介绍了空腔解耦爆炸的基础理论知识，指出折合位移势是一个与距离无关的函数，因而在地震波运动的分析中极为方便。朱号锋等[3]利用一维球对称有限差分数值计算源程序模拟了硬岩中地下强爆炸的震源函数，得到了地下爆炸的折合位移势及其源频谱。肖卫国等[4-5]开展了不同介质和不同方式地下爆炸地震耦合效应的实验测量和数值模拟工作。卢强等[6]基于标准线性固体模型，给出了球面应力波的折合位移势在 Laplace 域的理论解，并指出折合位移势的稳态值的依赖关系。

可以看出，当前对折合位移势的研究在理论、实验和数值均有涉及。由于折合位移势对载荷特征、本构关系和材料参数的依赖极为复杂，而量纲分析是对复杂问题进行初步分析的有效方法，在爆炸力学等领域得到了广泛应用[7]。如李丽萍等[8]采用量纲分析建立了爆炸冲击波效应靶模型，并开展了实验研究；赵传荣等[9]对影响冲击波压力峰值和脉冲宽度的因素进行量纲分析，建立了经验模型并开展了实例分析；钟巍等[10]基于量纲分析推导了爆炸冲击波作用后钢化玻璃碎片质量与飞散距离的函数关系式，并通过实测数据验证了公式的合理性。

为了快速估算和探索规律，对折合位移势的稳态值进行了量纲分析。通过观察地运动模拟结果的分布特点，给出了一定条件下折合位移势的 5 个经验估算公式。采用最小二乘法确定了拟合参数，计算结果表明公式的误差约为 10%。最后，利用所得公式讨论了空腔半径、压力峰值、作用时间、介质密度、屈服强度和弹性模量对折合位移势的影响规律。

1 数值模拟的基本情况

采用 Lagrange 结构动力学计算程序[11-12]，计算了无限大弹塑性介质中球形空腔表面作用三角衰减的载荷，得到了介质中应力波衰减的情况，积累了大量地运动的模拟结果。球形空腔用半径 R 表征；压力载荷用压力峰值 p_0 和作用时间 T 表征；采用弹性-线性硬化塑性模型描述介质的本构关系，模型参数主要包括：密度 ρ、弹性模量 E、泊松比 μ、屈服强度 Y、塑性硬化模量 E_t。

收稿日期：2019-04-28 责任编辑：车轩玉 DOI：10.13319/j.cnki.sjztddxxbzrb.20190081

作者简介：何增(1991—)，男，助理研究员，研究方向为爆炸力学。E-mail：hezeng@nint.ac.cn

何增，浦锡锋，王海兵，等.基于量纲分析法的地运动折合位移势规律研究[J].石家庄铁道大学学报：自然科学版，2020，33(4)：115-124.

本文主要关心折合位移势 ψ，表1列出了计算中空腔半径 R、压力峰值 p_0、作用时间 t 和屈服强度 Y 的取值情况。介质密度 ρ、弹性模量 E、泊松比 μ、塑性硬化模量 E_t 均固定。

表1 数值计算中的参数取值

R/cm	p_0/GPa	t/ms	Y/GPa	R/cm	p_0/GPa	t/ms	Y/GPa
112.74	0.02	0.5	0.03	228.58	0.5	—	0.2
142.05	0.05	1.0	0.04	—	0.8	—	0.3
168.42	0.1	2.0	0.05	—	1.0	—	0.5
202.95	0.2	—	0.08	—	1.5	—	—
212.19	0.3	—	0.105	—	2.0	—	—

图1给出了空腔半径112.74 cm、压力峰值0.3 GPa、作用时间1 ms情形下的折合位移势曲线。可以观察到，折合位移势在10.0～17.5 ms之间基本保持不变，故数据处理中统一取15 ms时刻的折合位移势为稳态值，记作 ψ_∞。进一步将折合位移势的稳态区域放大可以发现：对 $Y=0.03$ GPa，位移势的范围在 $606.3\ \mathrm{cm^3}<\psi<617.3\ \mathrm{cm^3}$，波动幅度为0.90%；对 $Y=0.3$ GPa，位移势的范围在 $22.98\ \mathrm{cm^3}<\psi<31.87\ \mathrm{cm^3}$，波动幅度为16.2%；对 $Y=0.5$ GPa，位移势的范围在 $-3.210\ \mathrm{cm^3}<\psi<6.291\ \mathrm{cm^3}$，波动幅度为308%。可以看出，位移势的变化幅度 $\Delta\psi\approx10\ \mathrm{cm^3}$，因此只有当 ψ 较大时才能认为在反射波到达前保持稳定。在分析中，将忽略 $\psi_\infty<100\ \mathrm{cm^3}$（本质上是 $\psi_\infty/R^3<6.979\times10^{-5}$，见下文）的模拟结果，并在不引起混淆时简称 ψ_∞ 为折合位移势。

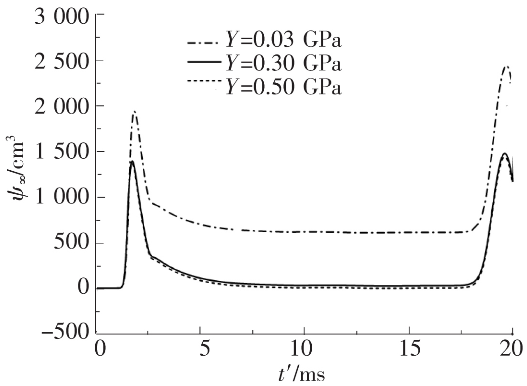


图1 3种屈服强度下的折合位移势曲线

2 数值模拟的基本情况

2.1 无量纲量的确定

基于线性代数的程序化无量纲量求解方法进行量纲分析[7,10]。决定折合位移势 ψ_∞ 的主要物理量包括：空腔半径 R；表征压力载荷的压力峰值 p_0 和作用时间 t；表征介质特性的密度 ρ、弹性模量 E、泊松比 μ、屈服强度 Y、塑性硬化模量 E_t。该问题所涉及物理量的单位和量纲总结在表2中。

表2 相关物理量的单位和量纲

物理量	单位	量纲	物理量	单位	量纲	物理量	单位	量纲
ψ_∞	cm^3	L^3	t	ms	T	μ	1	SI
R	cm	L	ρ	g/cm^3	ML^{-3}	Y	GPa	ML^{-1}T^{-2}
p_0	GPa	ML^{-1}T^{-2}	E	GPa	ML^{-1}T^{-2}	E_t	GPa	ML^{-1}T^{-2}

由表2可知，该问题共有9个变量，涉及3个基本量纲(L，M和T)，故可形成6个无量纲量。根据问题的特点，选择球形空腔半径 R、载荷作用时间 t 和介质弹性模量 E 组成基本量对其他物理量进行无量纲化，即参考量纲矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与原始量纲矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{matrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{T} \end{matrix} \\ \begin{matrix} R & t & E \end{matrix} \end{array} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{matrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{T} \end{matrix} \\ \begin{matrix} R & t & E & p_0 & \rho & \mu & Y & E_t & \psi_\infty \end{matrix} \end{array} \tag{2}$$

根据转换矩阵的计算公式 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$，可得

$$\boldsymbol{M}=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]^{\mathrm{T}} \begin{array}{c} \mathrm{L} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{T} \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} R & t & E & p_0 & \rho & \mu & Y & E_t & \psi_\infty \end{array} \end{array} \tag{3}$$

由此可计算 6 个无量纲量，结果如下：$\pi_4=\dfrac{p_0}{E}=\bar{p}_0$；$\pi_5=\dfrac{\rho}{R^{-2}t^2E}=\bar{\rho}$；$\pi_6=\mu$；$\pi_7=\dfrac{Y}{E}=\bar{Y}$；$\pi_8=\dfrac{E_t}{E}=\bar{E}_t$；$\pi_9=\dfrac{\psi_\infty}{R^3}=\bar{\psi}_\infty$。其中，利用 $\bar{q}$ 表示 q 无量纲化后的结果。为便于讨论，引入等价的无量纲作用时间 $\bar{t}$ 以改写 $\bar{\rho}$

$$\bar{t}=\frac{t}{\sqrt{\rho/E}R}=\frac{ct}{R} \tag{4}$$

式中，c 为介质的弹性波速，$c=\sqrt{E/\rho}$。此外，无量纲折合位移势 $\bar{\psi}_\infty$ 的表达式与文献[6]的结论一致，也表明了上述无量纲化的合理性。

2.2　无量纲表达式的确定

将因变量 $\bar{\psi}_\infty$ 写成其他无量纲量的显式形式

$$\bar{\psi}_\infty=f(\bar{p}_0,\bar{t};\mu,\bar{Y},\bar{E}_t) \tag{5}$$

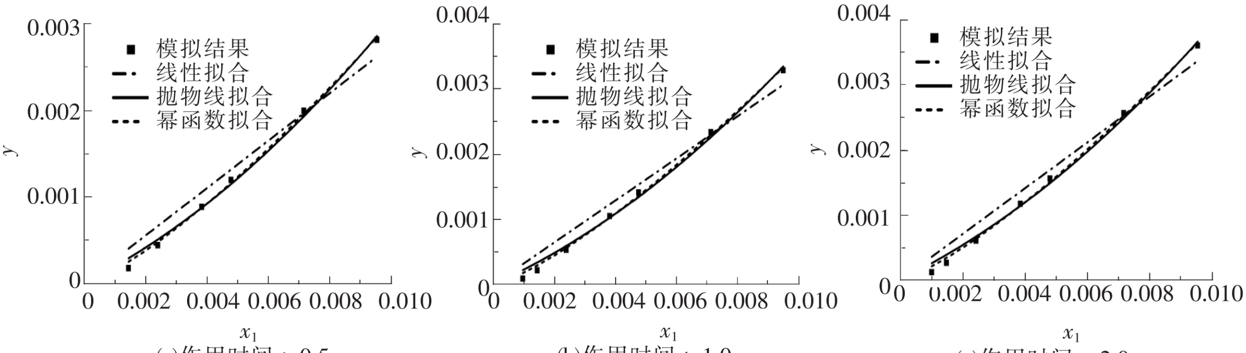
在数值模拟中，由于弹性模量 E、泊松比 μ、塑性硬化模量 E_t 保持不变，因此式(5)可简化为

$$\bar{\psi}_\infty=f(\bar{p}_0,\bar{t},\bar{Y}) \tag{6}$$

接下来根据数值模拟结果“猜测”待定函数 f 的形式并确定相关参数，基本原则是：符合物理、形式简单、参数规律。为便于行文，记 $y=\bar{\psi}_\infty$，$x_1=\bar{p}_0$，$x_2=\bar{t}$，$x_3=\bar{Y}$，即 y、x_1、x_2 和 x_3 分别代表折合位移势、压力峰值、作用时间和屈服强度的无量纲量。

2.2.1　y 与 x_1 之间的依赖关系 $y = f_1(x_1)$

为了研究 y 与 x_1 之间的依赖关系 $f_1(x_1)$，需固定 x_2 与 x_3。图 2 给出了 Y=0.105 GPa，R=112.74 cm，t 分别取 0.5 ms、1.0 ms 和 2.0 ms 的计算结果。可以明显观察到，y 与 x_1 呈正相关关系，其物理含义是折合位移势随压力峰值的增大而增大。进一步，当 $p_0 = 0$ 时，折合位移势应取零，即要求 $f_1(x_1=0)=0$。



(a)作用时间 t=0.5 ms　(b)作用时间 t=1.0 ms　(c)作用时间 t=2.0 ms

图 2　y 与 x_1 之间的依赖关系 f_1(固定 Y= 0.105 GPa，R= 112.74 cm)

图 2 中进一步给出了线性函数 $f_{11}=a_1'x_1$、抛物线函数 $f_{12}=a_1'x_1+a_2'x_1^2$ 与幂函数 $f_3=a_1'x_1^{a_2'}$ 3 种形式的拟合情况，表 3 列出了相应的参数拟合结果。可以看到，抛物线函数和幂函数的结果拟合较好，且幂函数的指数基本稳定在 1.291。此外，对 f_{11} 而言：$x_{21}:x_{22}:x_{23}=1:2:4$；$a_1'(x_{21}):a_1'(x_{22}):a_1'(x_{23})=1:1.170:1.284$。

表 3　3 种形式 f_1 的参数拟合结果

t/ms	$a_1'x_1$	$a_1'x_1+a_2'x_1^2$	$a_1'x_1^{a_2'}$
0.5	0.274 7	(0.178 6, 12.70)	(1.206, 1.300)
1.0	0.321 5	(0.211 3, 14.67)	(1.354, 1.291)
2.0	0.352 7	(0.235 1, 15.66)	(1.425, 1.283)

f_{12} 和 f_{13} 的参数也有类型现象，这表明 y 与 x_2 呈正相关关系，但增速低于正比。

2.2.2 y与x_2之间的依赖关系$y = f_2(x_2)$

为了研究y与x_2之间的依赖关系$f_2(x_2)$，需固定x_1与x_3。图3给出了Y＝0.105 GPa，p_0分别取0.2 GPa、0.5 GPa、1.0 GPa和2.0 GPa的计算结果($p_0 \leqslant 0.1$ GPa的折合位移势过小，故舍掉)，其中空腔半径R和作用时间t取表1中所有值。可以明显观察到，y与x_2呈正相关关系，但增速低于正比，与上文的结论一致。进一步，当$t = 0$时，折合位移势应取零，即要求

$$f_2(x_2 = 0) = 0 \tag{7}$$

图3进一步给出了幂函数$f_{21} = b_1' x_2^{b_2'}$、指数函数$f_{22} = b_1' + b_2' e^{b_3' x_2}$与$f_{23} = b_1' - b_1' e^{b_2' x_2}$ 3种形式的拟合情况，表4列出了相应的参数拟合结果。可以看到，f_{21}和f_{23}符合式(7)的要求但拟合度较差，f_{22}拟合度很好但违反式(7)的要求。

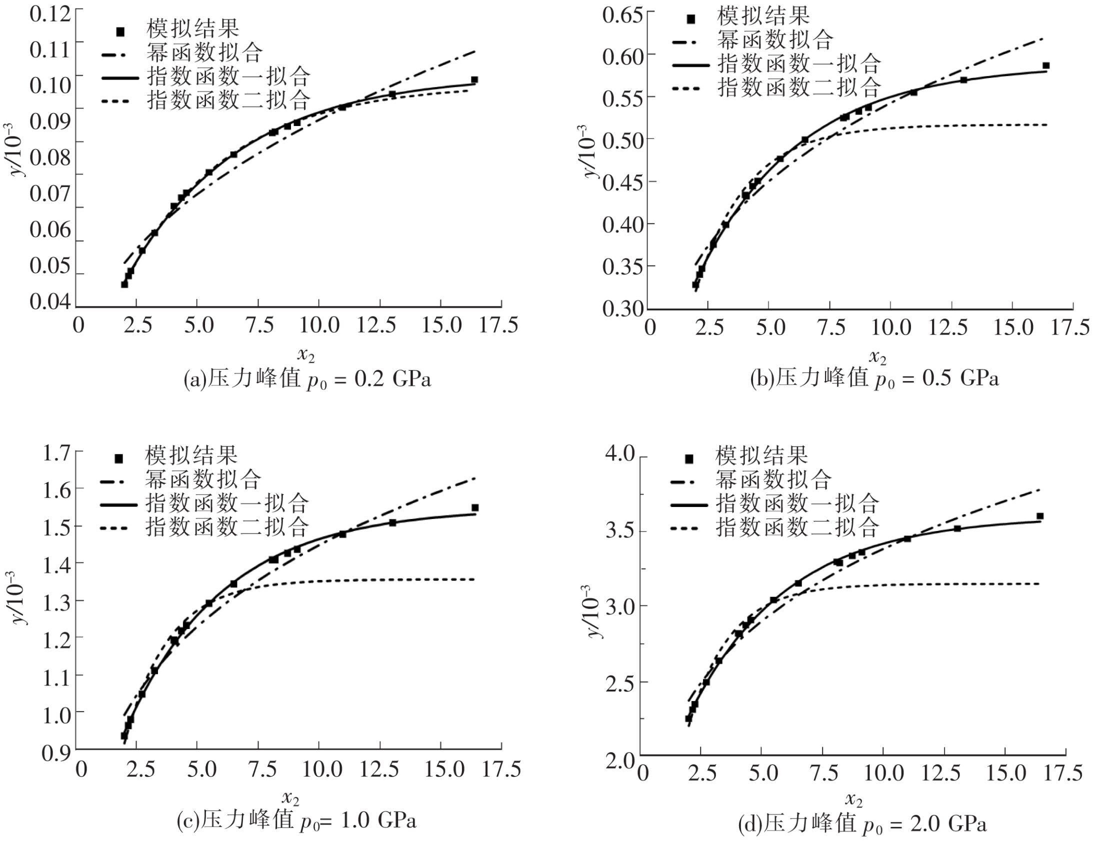
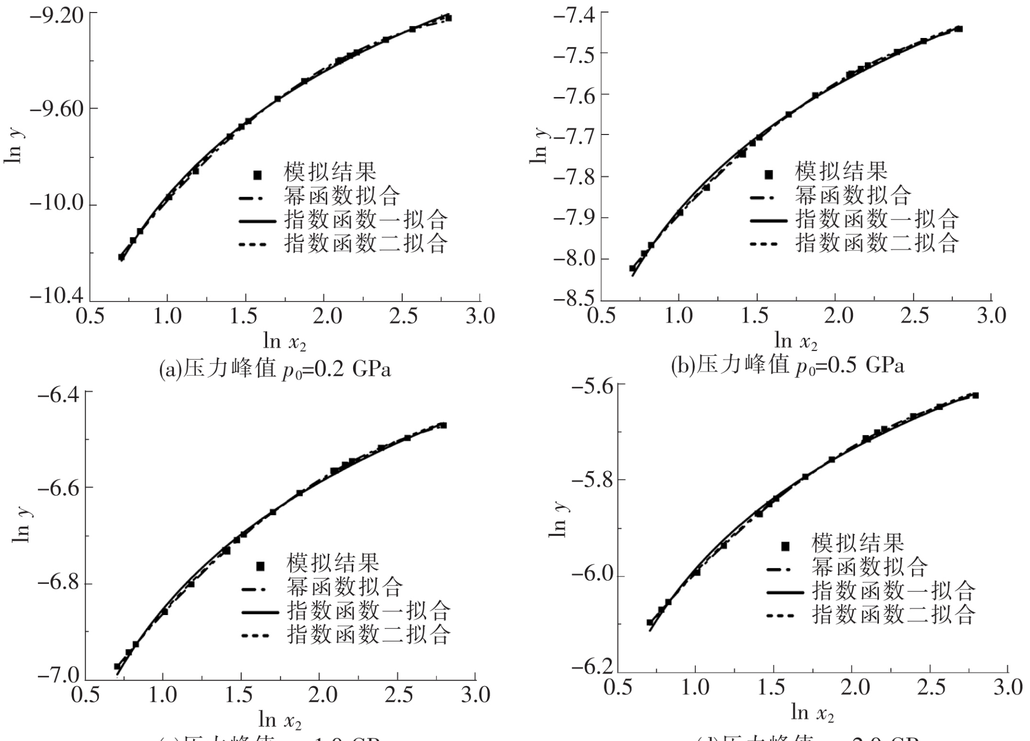


图3 y与x_2之间的依赖关系$f_2(x_2)$(固定Y＝ 0.105 GPa)

表4 3种形式f_2的参数拟合结果

p_0/GPa	$b_1' x_2^{b_2'}$	$b_1' + b_2' e^{b_3' x_2}$	$b_1' - b_1' e^{b_2' x_2}$
0.2	(3.18E-5，0.433 7)	(1.00E-4，－9.64E-5，－0.213 6)	(9.73E-5，－0.236 7)
0.5	(2.91E-4，0.269 9)	(5.87E-4，－4.12E-3，－0.237 4)	(5.16E-4，－0.479 3)
1.0	(8.39E-4，0.236 8)	(1.55E-3，－9.93E-4，－0.247 3)	(1.36E-3，－0.557 9)
2.0	(2.02E-3，0.223 4)	(3.60E-3，－2.21E-3，－0.249 0)	(3.15E-3，－0.594 1)

另一方面，对模拟结果y和x_2取对数，见图4。图4中还给出了抛物线函数$\ln f_{21} = b_1' + b_2' \ln x_2 + b_2' (\ln x_2)^2$、幂函数$\ln f_{22} = b_1' (\ln x_2)^{b_2'}$与指数函数$\ln f_{23} = b_1' + b_2' e^{b_3' \ln x_2}$的拟合情况，相应的参数见表5。可以看出，3个函数的拟合度都很好，且幂函数的指数b_2'和指数函数的系数b_3'的数值比较稳定。($\ln x_2$，y)和(x_2，$\ln y$)的拟合结果与($\ln x_2$，$\ln y$)类似，根据形式简单原则，不再列出。



(a)压力峰值 p_0=0.2 GPa　(b)压力峰值 p_0=0.5 GPa

(c)压力峰值 p_0=1.0 GPa　(d)压力峰值 p_0=2.0 GPa

图 4　ln y 与 ln x_2 之间的依赖关系 ln f_2（固定 Y＝0.105 GPa）

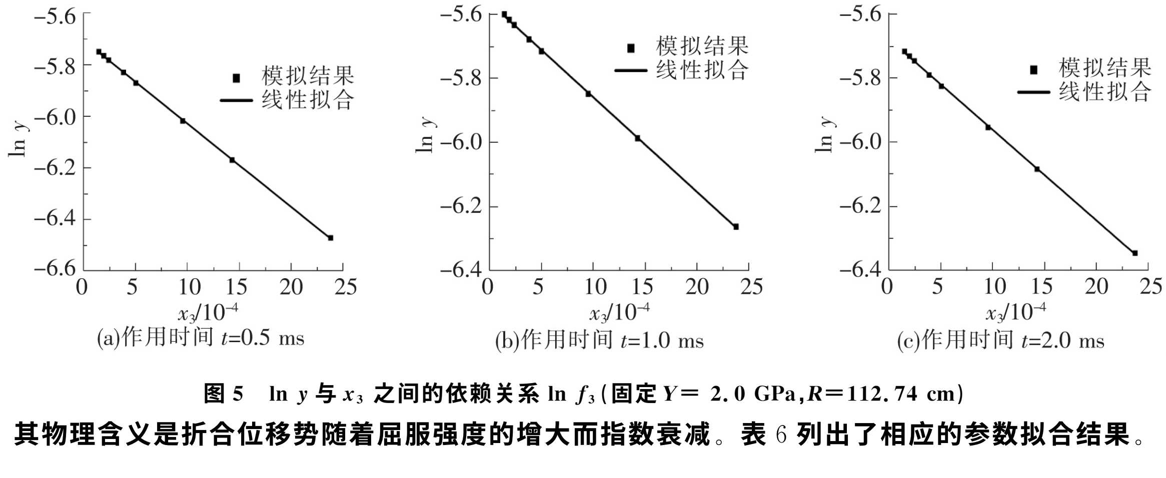
表 5　3 种形式 ln f_2 的参数拟合结果

p_0/GPa	$b_1'+b_2'\ln x_2+b_2'(\ln x_2)^2$	$b_1'(\ln x_2)^{b_2'}$	$b_1'+b_2'e^{b_3'\ln x_2}$
0.2	(−10.86，1.046，−0.166 2)	(−9.960，−0.076 5)	(−8.925，−2.131，−0.710 5)
0.5	(−8.387，0.579 7，−0.086 8)	(−7.884，−0.056 5)	(−7.207，−1.260，−0.610 9)
1.0	(−7.296，0.508 1，−0.076 5)	(−6.855，−0.056 7)	(−6.270，−1.096，−0.617 8)
2.0	(−6.399，0.474 8，−0.071 1)	(−5.987，−0.061 0)	(−5.432，−1.031，−0.609 2)

2.2.3　y 与 x_3 之间的依赖关系 $y=f_3(x_3)$

为了研究 y 与 x_3 之间的依赖关系 $f_3(x_3)$，需固定 x_1 与 x_2。图 5 给出了 R＝112.74 cm，p_0＝2.0 GPa，t 分别取 0.5 ms、1.0 ms 和 2.0 ms 的计算结果。可以清晰地看出，ln y 与 x_3 符合线性关系

$$\ln y=c_1'+c_2'x_3 \Rightarrow y=C_1'e^{C_2'x_3} \tag{8}$$



(a)作用时间 t=0.5 ms　(b)作用时间 t=1.0 ms　(c)作用时间 t=2.0 ms

图 5　ln y 与 x_3 之间的依赖关系 ln f_3（固定 Y＝ 2.0 GPa，R＝112.74 cm）

其物理含义是折合位移势随着屈服强度的增大而指数衰减。表 6 列出了相应的参数拟合结果。

表6 f_3 的参数拟合结果

t/ms	$\ln y=c_1'+c_2'x_3$
0.5	(−0.571 0, −323.1)
1.0	(−5.567, −295.0)
2.0	(−5.481, −283.1)

2.2.4 $y=f(x_1, x_2, x_3)$的表达式

上文分别确定了 f_1、f_2 和 f_3 的形式,总结一下:$f_1(x_1)$取抛物线函数与幂函数较佳;$f_2(x_2)$取指数函数(无 $b_1'+b_2'=0$ 约束),或者 $\ln f_2(\ln x_2)$取抛物线函数、幂函数或指数函数较佳;$f_3(x_3)$取指数函数,即 $\ln f_3(x_3)$取线性函数较佳。

假设在所关注的范围内,各自变量对因变量的影响是彼此独立的,即 x_1、x_2 和 x_3 并没有耦合在一起。此外,根据简洁性原则,可考虑正常形式(x, y)和对数形式$(\ln x, \ln y)$2 种类型的表达式。综上,考虑各自变量的函数可写作

$$y=f(x_1,x_2,x_3)=f_1(x_1)\times f_2(x_2)\times f_3(x_3) \tag{9}$$

或

$$\ln y=f(\ln x_1,\ln x_2,\ln x_3)=f_1(\ln x_1)+f_2(\ln x_2)+f_3(\ln x_3) \tag{10}$$

(1)类型一:$y=f(x_1, x_2, x_3)$。$y=f(x_1, x_2, x_3)$的候选表达式有 2 个,分别为

$$y=(a_1'x_1+a_2'x_1^2)\times(b_1'+b_2'\mathrm{e}^{b_3'x_2})\times(c_1'\mathrm{e}^{c_2'x_3})=(a_1x_1+a_2x_1^2)(1+a_3\mathrm{e}^{a_4x_2})\mathrm{e}^{a_5x_3} \tag{11}$$

$$y=(a_1'x_1^{a_2'})\times(b_1'+b_2'\mathrm{e}^{b_3'x_2})\times(c_1'\mathrm{e}^{c_2'x_3})=a_1x_1^{a_2}(1+a_3\mathrm{e}^{a_4x_2})\mathrm{e}^{a_5x_3} \tag{12}$$

(2)类型二:$\ln y=f(\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)$。当 $f_1(x_1)$的表达式取 $a_1'x_1^{a_2'}$ 比 $a_1'x_1+a_2'x_1^2$ 在取对数后的形式更简洁,故 $\ln y=f(\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)$的候选表达式有 3 个,分别为

$$\ln y=(\ln a_1'+a_2'\ln x_1)+b_1'(\ln x_2)^{b_2'}+(c_1'+c_2'x_3)=a_1+a_2\ln x_1+a_3(\ln x_2)^{a_4}+a_5x_3 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\ln y=&(\ln a_1'+a_2'\ln x_1)+[b_1'+b_2'\ln x_2+b_3'(\ln x_2)^2]+(c_1'+c_2'x_3)=\\&a_1+a_2\ln x_1+a_3\ln x_2+a_4(\ln x_2)^2+a_5x_3\end{aligned} \tag{14}$$

$$\ln y=(\ln a_1'+a_2'\ln x_1)+(b_1'+b_2'\mathrm{e}^{b_3'\ln x_2})+(c_1'+c_2'x_3)=a_1+a_2\ln x_1+a_3\mathrm{e}^{a_4\ln x_2}+a_5x_3 \tag{15}$$

2.2.5 待定系数的求解

上述共计 5 个 $y=f(x)$的表达式,每个表达式含 5 个待定系数 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_5)^{\mathrm{T}}$。使用最小二乘法来确定 $\boldsymbol{a}$ 的具体数值。

为了同时描述 2 种表达式类型,用(X, Y)统一表示模拟情况:对类型一,$(X, Y)=(x, y)$;对类型二,$(X, Y)=(\ln x, \ln y)$。使用下标 i 表示第 i 次的模拟值,则理论值和模拟值的差值记作

$$d_i(a)=f(X_i)-Y_i \tag{16}$$

最小二乘法是使 d_i 的平方和 D 最小,其中

$$D(a)=\sum_i d_i^2(a) \tag{17}$$

为此,要求 $D(a)$对 $\boldsymbol{a}$ 的偏导数为零,即

$$g_j(a)=\frac{\partial D}{\partial a_j}=0 \quad j=1,\cdots,5 \tag{18}$$

式(18)是关于 $a_j(j=1,\cdots,5)$的非线性方程组,利用方程组的牛顿迭代法来解决该求根问题。记 $\boldsymbol{G}(a)=(g_1,\cdots,g_5)^{\mathrm{T}}$,则牛顿迭代法的计算公式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}'(a)\Delta a^{k+1}=-G(a^k)\\ \boldsymbol{a}^{k+1}=\boldsymbol{a}^k+\Delta\boldsymbol{a}^{k+1}\end{cases} \tag{19}$$

其中,$\boldsymbol{G}'(a)$为向量函数 $\boldsymbol{G}(a)$的导数,即雅克比矩阵,其元素为

$$G_{i,j}'=\frac{\partial g_i}{\partial a_j}=\frac{\partial^2 D}{\partial a_i\partial a_j}=G_{j,i}', \quad i,j=1,\cdots,5 \tag{20}$$

3　结果与讨论

3.1　$y \geqslant y_c$ 的结果

选取如下计算条件下的模拟结果确定参数：(1) R 和 T 取表 1 中所有值，$p_0=0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$ GPa，$Y=0.105$ GPa；(2) p_0、T 和 Y 取表 1 中所有值，$R=112.74$ cm。取无量纲位移势 $y \geqslant y_c=6.979\times10^{-5}$ 的模拟结果进行拟合，共计 203 组。

牛顿迭代法的关键是提供合适的初值，而上文已对此作了初步拟合。表 7 给出了待定参数的收敛值和平均相对误差。误差大于 50％的个数均为 15 个。

表 7　不同形式的 f 在 $y \geqslant y_c$ 的拟合结果

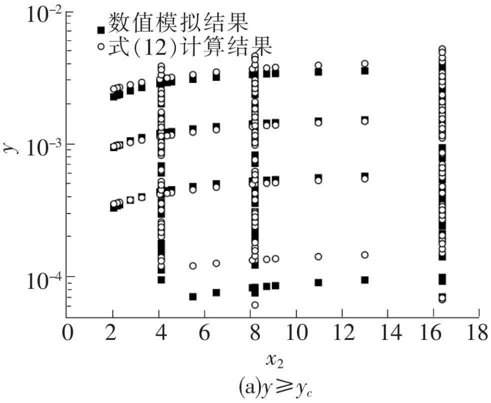
f 形式	拟合系数					相对误差/％
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
式(11)	0.196 1	47.83	−0.522 3	−0.152 3	−601.7	19.6
式(12)	4.967	1.438	−0.549 9	−0.157 7	−616.4	16.5
式(13)	−0.070 0	1.438	1.168	0.293 2	−617.4	16.3
式(14)	0.769 7	1.438	0.367 8	−0.037 0	−617.0	16.4
式(15)	1.922	1.438	−1.210	−0.383 3	−617.2	16.4

从表 7 中可以看出，当 f_1 取幂函数形式 $f_1=a_1{}'x_1^{a_2{}'}$、f_3 取指数形式 $f_3=c_1{}'\exp(c_2{}'x_3)$ 时，无论 f_2 取何种形式，相对误差都相近，且 x_1 的指数 $a_2\approx1.438$、x_3 的斜率 $a_5\approx-617.0$，变化范围不足 1％，这可能暗示在计算条件下，无量纲位移势对无量纲压力峰值的幂函数依赖、对无量纲屈服强度的指数依赖具有普遍意义，但对无量纲作用时间的依赖关系并不明显。

以式(12)为例，图 6(a)比较了无量纲折合位移势的模拟值与计算值。在 $y \gtrsim 3\times10^{-4}$ 时，拟合值与模拟值较为接近；在 $y \lesssim 10^{-4}$ 时，拟合值明显偏高。其他公式的结果是类似的。由于 f_1 和 f_3 的形式是固定的(不含式(11)的 f_1)，这也表明目前无法单纯根据模拟结果和量纲分析来确定 f_2 的最佳形式。

3.2　$y \geqslant 3y_c$ 的结果

选取 $y \geqslant 3y_c$ 的模拟结果(共计 177 组)重新进行最小二乘法拟合，相应结果如图 6(b)和表 8 所示。误差大于 50％的个数均为 2 个。与 $y \geqslant y_c$ 的结果相比，$y \geqslant 3y_c$ 最主要改变的是相对误差与误差超过 50％的个数大幅减小，这也说明本文的表达式均不适合 y 值小的情形。



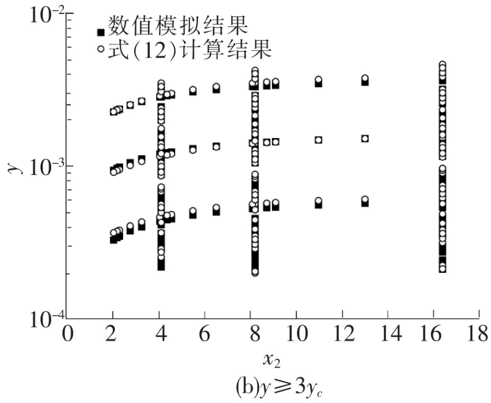


图 6　无量纲折合位移势的模拟值与计算值的比较

表 8　不同形式的 f 在 $y \geqslant 3y_c$ 的拟合结果

f 形式	拟合系数					相对误差/％
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
式(11)	0.262 0	29.60	−0.665 9	−0.240 8	−519.5	10.1
式(12)	2.286	1.315	−0.666 6	−0.232 6	−530.5	9.05
式(13)	6.546	1.315	−6.147	0.069 4	−531.1	9.05
式(14)	−0.067 3	1.315	0.540 5	−0.080 1	−530.8	9.04
式(15)	0.995 8	1.315	−1.194	−0.683 4	−531.0	9.05

3.3 折合位移势的规律性

以式(12)为例讨论折合位移势的规律性。代入表8中的参数,可得折合位移势的经验公式为

$$\overline{\psi}_\infty = 2.286\times\overline{p}_0^{1.315}\times(1-0.666\,6e^{-0.232\,6\bar{t}})\times e^{-530.5\overline{Y}} \tag{21}$$

其使用条件为:压力载荷为三角波,作用在无限大弹塑性介质的球形空腔表面;无量纲压力峰值 $9.524\times10^{-4}\leqslant\overline{p}\leqslant9.524\times10^{-3}$;无量纲作用时间 $2.021\leqslant\bar{t}\leqslant16.39$;泊松比 $\mu=0.18$;无量纲屈服强度 $1.429\times10^{-4}\leqslant\overline{Y}\leqslant2.381\times10^{-3}$;无量纲塑性硬化模量 $\overline{E}_t=0.523\,8$。式(21)的量纲形式为

$$\overline{\psi}_\infty = 2.286R^3\times\left(\frac{p_0}{E}\right)^{1.315}\times(1-0.666\,6e^{-0.232\,6\frac{t}{\sqrt{\rho/E}R}})\times e^{-530.5\frac{Y}{E}} \tag{22}$$

为了便于讨论,对式(22)取对数,可得

$$\ln\psi_\infty = \ln a_1 + 3\ln R + a_2\ln\left(\frac{p_0}{E}\right) + \ln f_2(R,t,\rho,E) + a_5\frac{Y}{E} \tag{23}$$

3.3.1 半径的影响

对 $\ln\psi_\infty$ 关于空腔半径 R 求偏导数,得

$$\frac{\partial\ln\psi_\infty}{\partial R} = \frac{1}{Rf_2}(3f_2 - a_3a_4\bar{t}e^{a_4\bar{t}}) \tag{24}$$

在 $\bar{t}$ 的范围内,式(24)右侧括号内的函数大于零,从而 $\frac{\partial\ln\psi_\infty}{\partial R}>0$,这表明折合位移势随半径增加而增加。图7展示了在 $p_0=0.5$ GPa、$t=1.0$ ms、$\rho=2.46$ g/cm^3、$E=210$ GPa、$Y=0.120$ GPa 条件下由式(22)计算得到的折合位移势随半径的变化曲线,图中还标出了适用范围。

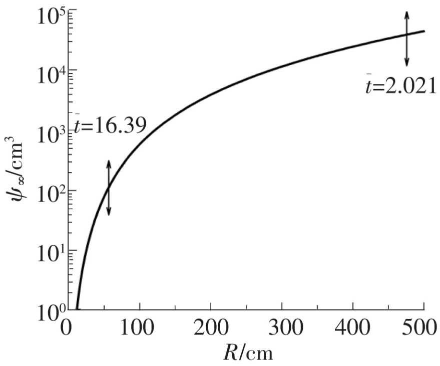


图7 折合位移势随空腔半径的变化曲线

3.3.2 载荷的影响

(1)压力峰值的影响。对 $\ln\psi_\infty$ 关于压力峰值 p_0 求偏导数,得

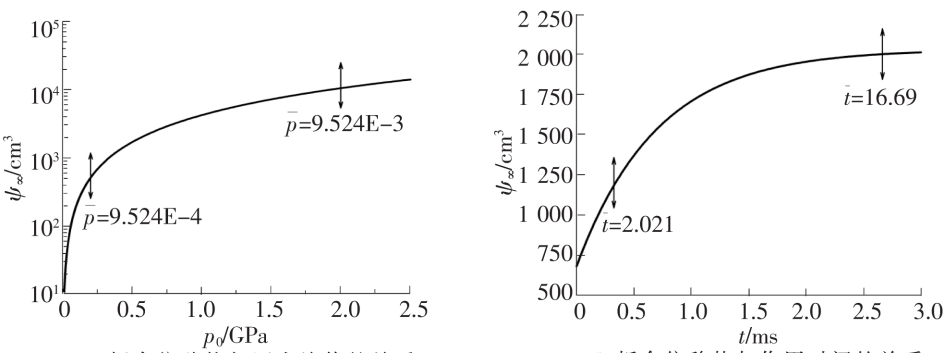
$$\frac{\partial\ln\psi_\infty}{\partial R} = \frac{a_2}{p_0}>0 \tag{25}$$

这表明折合位移势随压力峰值升高而增加。图8(a)展示了在 $R=150$ cm、$t=1.0$ ms、$\rho=2.46$ g/cm^3、$E=210$ GPa、$Y=0.120$ GPa 条件下折合位移势随压力峰值的变化曲线及适用范围。

(2)作用时间的影响。对 $\ln\psi_\infty$ 关于作用时间 t 求偏导数,得

$$\frac{\partial\ln\psi_\infty}{\partial t} = \frac{a_3a_4\bar{t}}{tf_2}e^{a_4\bar{t}}>0 \tag{26}$$

这表明折合位移势随作用时间增长而增加。图8(b)展示了在 $R=150$ cm、$p_0=0.5$ GPa、$\rho=2.46$ g/cm^3、$E=210$ GPa、$Y=0.120$ GPa 条件下折合位移势随作用时间的变化曲线及适用范围。



(a)折合位移势与压力峰值的关系 (b)折合位移势与作用时间的关系

图8 折合位移势随压力载荷的变化曲线

3.3.3　介质的影响

（1）密度的影响。对 $\ln\psi_\infty$ 关于介质密度 ρ 求偏导数，得

$$\frac{\partial \ln \psi_\infty}{\partial \rho}=-\frac{a_3 a_4 \bar{t}}{2\rho f_2}\mathrm{e}^{a_4 \bar{t}}<0 \tag{27}$$

这表明折合位移势随介质密度增加而减小。图 9(a)展示了在 $R=150$ cm、$p_0=0.5$ GPa、$t=1.0$ ms、$\rho=2.46$ g/cm^3、$E=210$ GPa、$Y=0.120$ GPa 条件下折合位移势随介质密度的变化曲线及适用范围。

（2）屈服强度的影响。对 $\ln\psi_\infty$ 关于屈服强度 Y 求偏导数，得

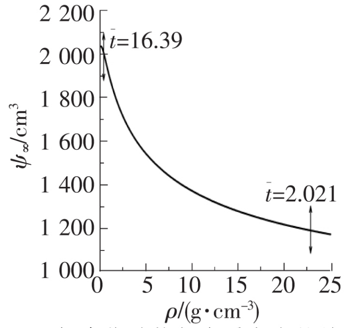
$$\frac{\partial \ln \psi_\infty}{\partial Y}=\frac{a_5}{E}<0 \tag{28}$$

这表明折合位移势随屈服强增强而减小。图 9(b)展示了在 $R=150$ cm、$p_0=0.5$ GPa、$t=1.0$ ms、$\rho=2.46$ g/cm^3、$E=210$ GPa 条件下折合位移势随屈服强度的变化曲线及适用范围。

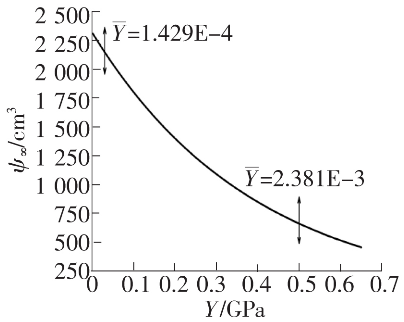
（3）弹性模量的影响。对 $\ln\psi_\infty$ 关于弹性模量 E 求偏导数，得

$$\frac{\partial \ln \psi_\infty}{\partial E}=-\frac{1}{E}\left(a_2-\frac{a_3 a_4 \bar{t}}{2f_2}\mathrm{e}^{a_4 \bar{t}}+a_5\frac{Y}{E}\right) \tag{29}$$

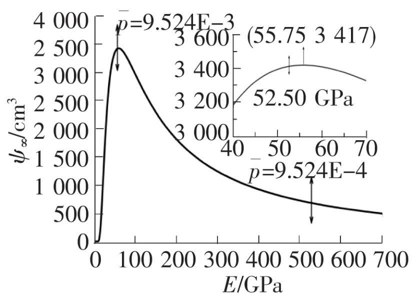
在 $R=150$ cm、$p_0=0.5$ GPa、$t=1.0$ ms、$\rho=2.46$ g/cm^3、$Y=0.120$ GPa 条件下，当 $E<E\star=55.75$ GPa 时，式(29)大于零，表明折合位移势随弹性模量增强而增加；反之，当 $E>E\star$ 时，折合位移势随弹性模量增强而减小。图 9(c)展示了相同条件下折合位移势随弹性模量的变化曲线及适用范围，并标注了最大折合位移势 $\psi_\infty(E\star)=3\ 417$ cm^3 的位置。



(a)折合位移势与介质密度的关系



(b)折合位移势与屈服强度的关系



(c)折合位移势与弹性模量的关系

图 9　折合位移势随介质参数的变化曲线

4　结论

本文主要通过量纲分析法研究地运动折合位移势稳态值的模拟结果。首先，简要介绍了数值模拟的基本情况。其次，确定了该问题的 9 个主要物理量，根据 π 定理得到了 6 个无量纲量，并简化为无量纲位移势 $\bar{\psi}_\infty$ 关于无量纲压力峰值 $\bar{p}_0$、作用时间 $\bar{t}$ 和屈服强度 $\bar{Y}$ 的待定函数。然后，通过观察模拟数据的分布特点分别确定了 $f_1(\bar{p}_0)$、$f_2(\bar{t})$和 $f_3(\bar{Y})$的形式，并最终确定了 $f(\bar{p}_0,\bar{t},\bar{Y})$的 5 种候选函数，还给出了待定参数的求解细节。当无量纲位移势 $\bar{\psi}_\infty>2.094\times10^{-4}$ 时，估算公式的计算结果与 177 组模拟数据吻合得很好，平均误差在 10%左右。最后讨论了估算公式关于空腔、载荷和介质的规律性。

本文只是使用量纲分析的手段对折合位移势的规律性进行初探，还可从以下 2 个方面进行拓展。首先，由于计算程序的限制，模型较为简单，个别参数的取值与典型值差距较大，后续可使用更复杂的模型、更准确的参数重新计算和分析。其次，对于地下爆炸过程涉及到的其他物理量，如折合速度势、准静态压力等，也可尝试利用量纲分析的方法进行处理。

参　考　文　献

[1]王礼立. 应力波基础[M]. 2 版. 北京：国防工业出版社，2010.

[2]李孝兰. 空腔解耦爆炸实验研究的基础理论 (I)[J]. 爆炸与冲击，2000，20(2)：186-192.

[3]朱号锋,靳平,肖卫国. 硬岩中地下爆炸震源函数的数值模拟[J]. 爆炸与冲击, 2009, 29(6): 648-653.

[4]肖卫国,王肖钧,朱号锋,等. 不同介质地下爆炸的地震耦合效应[J]. 爆炸与冲击, 2012, 32(3): 267-672.

[5]肖卫国,王肖钧,劳俊,等. 不同方式地下爆炸地震耦合效应的数值模拟[J]. 计算物理, 2011, 28(6): 797-802.

[6]卢强,王占江. 标准线性固体材料中球面应力波传播特征研究[J]. 物理学报, 2015, 64(10): 1-7.

[7]谈庆明. 量纲分析[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005.

[8]李丽萍,孔德仁,王芳,等. 基于量纲分析的爆炸冲击波效应靶模型分析与实验研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(6): 100-104.

[9]赵传荣,孔德仁. 基于量纲分析的平面冲击波经验模型研究[J]. 高压物理学报, 2016, 30(6): 526-530.

[10]钟巍,田宙,寿列枫,等. 基于量纲分析的爆炸冲击波作用后钢化玻璃碎片质量分布规律研究[J]. 兵工学报, 2018, 39(7): 1323-1332.

[11]浦锡锋,王仲琦,白春华,等. 多物质流体动力学方法与结构动力学方法结合的流固耦合计算技术[J]. 计算物理, 2010, 27(6): 833-839.

[12]浦锡锋,王仲琦,白春华,等. 用于爆炸流场与结构间相互作用分析的 Euler-Lagrange 耦合模拟技术[J]. 爆炸与冲击, 2011, 31(1): 6-10.

Regularity Study on Reduced Displacement Potential of Ground Motion Based on Dimensional Analysis Method

He Zeng[1], Pu Xifeng[1], Wang Haibing[1], Wang Zhihuan[1,2], Tian Zhou[1]

(1. Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China;

2. Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Reduced displacement potential (RDP) of ground motion is a key quantity in the study of decoupled explosions in cavities, stress wave propagation, seismic coupling effects of underground explosions and so on. Combining numerical computation and dimensional analysis, this paper analyzed the RDP dependency on loading and material model coefficients, and developed empirical prediction formulas of the RDP under certain conditions. The least square method and Newton's iteration method were employed to fit the involved coefficients. The formulas quantitatively reflected the functional relationship between the RDP and cavity radius, pressure peak, loading duration, medium density, yield strength as well as elastic modulus. The predicted values were in good agreement with simulated results, which could provide effective reference for evaluation of the RDP. On this basis the regularity of the RDP was discussed.

Key words: dimensional analysis; reduced displacement potential; least square method; regularity study