

断裂过程区内聚力分布对 简支梁刚度和自振特性的影响研究

解沅衡, 段树金, 侯永康, 安蕊梅

(石家庄铁道大学 土木工程学院, 河北 石家庄 050043)

摘要:对于含切口和断裂过程区简支梁受均布荷载作用的问题,选择弯矩作用下对称边裂纹的无限大板、均布荷载作用下的简支梁、切应力作用下的半无限大板、拉应力作用下的无限大板4种基本问题的应力函数叠加求解。基于“Duan and Nakagawa's Model”,通过数学解析法和选点法得到了含断裂过程区简支梁的全场解析解。分析对比了无裂缝简支梁和断裂过程区内聚力呈水压力型、恒定型分布或权函数为一次型时简支梁的拉应变软化曲线和自振特性,发现内聚力呈水压力型分布与一次权函数下拉应变软化曲线有相似的变化趋势;无裂缝简支梁自振频率最高,内聚力恒定型次之,水压力型和一次权函数型时最低。

关键词:简支梁;断裂过程区;应力函数;拉应变软化曲线;自振特性

中图分类号:TU375.1 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-0373(2018)02-0001-06

0 引言

由Dugdale^[1]提出的模型可应用于理想弹塑性断裂^[2-4],但并不适用于混凝土类拉应变软化材料。根据混凝土的变形特点,Hillerborg^[5]于1976年提出了“虚裂纹模型”(简称FCM);Bazant^[6]于1983年提出了“钝裂纹带模型”(简称BCBM)。FCM、BCBM等模型虽然较好地反应了混凝土等软化材料在断裂过程区的应力和变形特点,但不能从数学上对过程区应力分布进行解析求解。20世纪八十年代,段树金等提出了有限应力集中的概念,采用加权积分法和奇异曲面叠加法得出了过程区应力场解析解,该模型在国际上被称为“Duan and Nakagawa's Model”^[7-10]。郭全民等^[11]用函数叠加法得出了含断裂过程区简支梁在均布荷载作用下的应力函数全场解析解并通过仿真验证了解的可靠性,但所取函数数量不足导致裂纹面上呈现了较大应力。本文基于“Duan and Nakagawa”模型和文献^[11];叠加多种不同荷载作用、不同裂纹长度下无限大板的弹性解答,得到含断裂过程区的简支梁的更高精度的解析函数;研究不同断裂过程区内聚力分布对拉应变软化曲线和梁自振频率的影响。

1 基本问题与基本方程

1.1 研究对象

研究对象为含切口和断裂过程区的简支梁,如图1所示,其中, $a+b$ 为韧带长度, b 为断裂过程区长度。

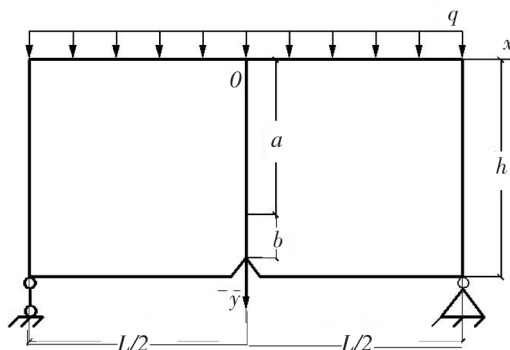


图1 均布荷载作用下带裂缝简支梁

收稿日期:2017-09-11 责任编辑:车轩玉 DOI:10.13319/j.cnki.sjztdxxb.2018.02.01

作者简介:解沅衡(1994—),男,硕士研究生,主要从事断裂力学的研究。E-mail:892430297@qq.com

基金项目:河北省自然科学基金(A2015210029);河北省教育厅青年基金(QN2014062)

解沅衡,段树金,侯永康,等.断裂过程区内聚力分布对简支梁刚度和自振特性的影响研究[J].石家庄铁道大学学报:自然科学版,2018,31(2):1-5.

1.2 基本方程

引用复变函数,弹性力学平面问题应力函数的一般形式可表示为

$$\nabla^2 \nabla^2 F_j(z, \bar{z}) = 0, F_j(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi_j + \psi_j(z) \quad (1)$$

式中, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 。这时相应的应力和位移分量为

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\varphi_j' - \bar{z}\varphi_j'' - \psi_j'' \\ \sigma_{yy} &= 2\varphi_j' + \bar{z}\varphi_j'' + \psi_j'' \\ \tau_{xy} &= -i(\bar{z}\varphi_j'' + \psi_j'') \end{aligned} \quad (2)$$

$$2G(u_j + iv_j) = k\varphi_j - \bar{z}\varphi_j' + \psi_j' \quad (3)$$

式中, G 为剪切弹性模量;对于平面应变问题 $k = 3 - 4\nu$, 对于平面应力问题 $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν 为泊松比。

(1) 弯矩作用下对称边裂纹的无限大板。如图 2 所示, 为一对称边裂纹的无限大板受弯曲作用, 采用加权积分法, 取一次型权函数, 通过加权积分法消除裂纹尖端应力奇异性, 弹性解答如下^[5]

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\sigma_0}{b^2}(a+b)[t(z^2+t^2)^{1/2} + z^2 \log(t+(z^2+t^2)^{1/2})]_{t=a}^{t=a+b} - \frac{\sigma_0}{3b^2}[(z^2+t^2)^{3/2}]_{t=a}^{t=a+b} \\ \psi_1 &= \frac{\sigma_0}{2b^2}(a+b)[- \frac{t^2}{3} \log(z+(z^2+t^2)^{1/2}) + \frac{z^3}{6} \log(t+(z^2+t^2)^{1/2})]_{t=a}^{t=a+b} + \\ &\quad \frac{\sigma_0}{b^2}[\frac{t^3}{4} \log(z+(z^2+t^2)^{1/2}) + \frac{z}{12}(z^2+t^2)^{3/2} - \frac{t^3}{4}(z^2+t^2)^{1/2} - \frac{t^3}{16}]_{t=a}^{t=a+b} + \\ &\quad \frac{2\sigma_0}{b^2}(a+b)[- \frac{zt}{6}(z^2+t^2)^{1/2} + \frac{t^3}{9}]_{t=a}^{t=a+b} \end{aligned} \quad (4)$$

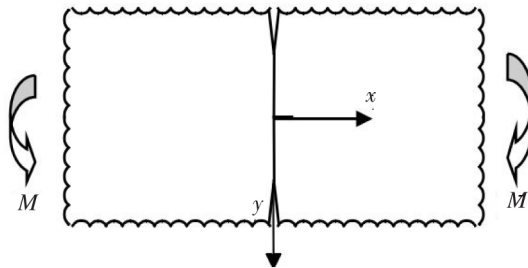


图 2 弯矩作用下无限大板

(2) 均布荷载作用下的简支梁。考虑一均布荷载作用下的简支梁, 其中 h 为梁高, l 为梁长, q 为梁上均布荷载。直接给出相应的应力分量

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} &= \frac{6q}{h^3}(l^2 - x^2)(y - \frac{h}{2}) + q \frac{y}{h}(4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5}) \\ \tau_{xy1} &= -\frac{6q}{h^3}x(\frac{h^2}{4} - y^2) \end{aligned} \quad (5)$$

(3) 切应力作用下的半无限大板。如图 3 所示, 为一半无限大板, 其自由表面作用着对称于 y 轴的剪应力, 用于消除前述第(1)项中沿 x 轴产生的剪应力。其相应的应力函数为

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \frac{-\sigma_0 a^2}{2\pi} \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \log(\frac{z + (z^2 + a^2)^{1/2}}{z - (z^2 + a^2)^{1/2}}) \\ \psi_3 &= \frac{\sigma_0 a^2}{2\pi} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \log(\frac{z + (z^2 + a^2)^{1/2}}{z - (z^2 + a^2)^{1/2}}) \end{aligned} \quad (6)$$

(4) 拉应力作用下的无限大板。考虑一带对称边裂纹的无限大板, 在无穷远处受拉应力作用, 如图 4 所示。其应力函数为

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= a \log(\frac{z + (z^2 + a^2)^{1/2}}{a}) \\ \psi_4 &= \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{1/2}} - a \log(\frac{z + (z^2 + a^2)^{1/2}}{a}) \end{aligned} \quad (7)$$

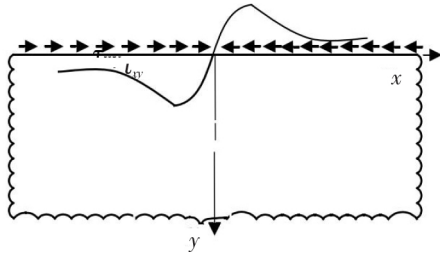


图3 受切应力作用的半无限大板

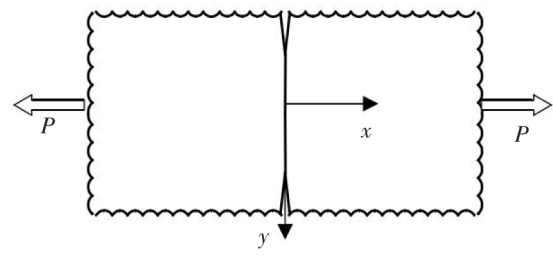


图4 受拉力作用的开裂板

2 不同内聚力分布下问题的求解

研究的裂缝模型满足以下条件:

- (1) 梁的有效高度为韧带长度和断裂过程区长度之和 $a+b$ 。
- (2) 裂缝尖端 $y=a$ 处正应力达到抗拉强度 f_t , 即 $\Sigma\sigma=f_t$ 时, 裂缝向前扩展, 并始终沿 y 轴方向。
- (3) 梁截面有效高度范围内应力合力为零, 即 $\Sigma T_{1j}=0$ 。
- (4) 梁端弯矩和正应力合力为零, 即 $\Sigma T_{2j}=0, \Sigma M_j=0$; 梁底一半的正应力和切应力的合力为零, 即 $\Sigma T_{3j}=0, \Sigma Q_j=0$ 。

设带裂缝无限大板受弯矩作用时荷载大小为 X_1 , 均布荷载作用下简支梁受力大小为 X_2 , 半无限大板受切应力作用大小为 X_3 , 半无限大板受水平集中力作用大小为 X_4 , 韧带宽度 a 不变, 改变受弯矩作用带裂缝无限大板的断裂过程区长度 b , 对应荷载大小为 X_5, X_6, X_7 , 改变均布荷载作用下简支梁梁底位置, 对应荷载大小为 X_8, X_9 。通过叠加几种无限大板和半无限大板的弹性解答, 计算各种模型权重。

2.1 水压力型分布

定义断裂过程区 $[a, a+b]$ 处应力分布呈水压力分布, 现指定

$$\sigma = \begin{cases} f_t, & \text{当 } y=a \text{ 时} \\ 2/3 f_t, & \text{当 } y=a+\frac{1}{3}b \text{ 时} \\ 1/3 f_t, & \text{当 } y=a+\frac{2}{3}b \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } y=a+b \text{ 时} \end{cases}$$

基于上述条件, 可以得到以下平衡方程

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1a} & \sigma_{2a} & \cdots & \sigma_{9a} \\ \sigma_{1b} & \sigma_{2b} & \cdots & \sigma_{9b} \\ \sigma_{1c} & \sigma_{2c} & \cdots & \sigma_{9c} \\ \sigma_{1d} & \sigma_{2d} & \cdots & \sigma_{9d} \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_9 \\ T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{19} \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_9 \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{29} \\ T_{31} & T_{32} & \cdots & T_{39} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_t \\ 2/3 f_t \\ 1/3 f_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

从中可以求得 $[X_i] = [-3.598\ 3 \ -0.007\ 9 \ -0.329\ 9 \ 3.431\ 2 \ 0.000\ 9 \ -5.664\ 3 \ 10.642\ 0 \ -0.107\ 0 \ 0.175\ 9]$ 。

2.2 恒定型分布

定义断裂过程区 $[a, a+b]$ 的应力为常数, 现域内以等距离取 3 个点, 其应力值等于 f_t , 由此可以得到以下平衡方程

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1a} & \sigma_{2a} & \cdots & \sigma_{9a} \\ \sigma_{1b} & \sigma_{2b} & \cdots & \sigma_{9b} \\ \sigma_{1c} & \sigma_{2c} & \cdots & \sigma_{9c} \\ \sigma_{1d} & \sigma_{2d} & \cdots & \sigma_{9d} \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_9 \\ T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{19} \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_9 \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{29} \\ T_{31} & T_{32} & \cdots & T_{39} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_t \\ f_t \\ f_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

从中可以求得 $[X_i] = [-8.448 \ 0 \ 0.048 \ 9 \ -1.937 \ 6 \ 12.127 \ 0 \ 0.002 \ 1 \ -2.636 \ 0 \ 12.175 \ 7 \ -0.214 \ 0 \ 0.197 \ 2]$ 。

2.3 一次权函数型

断裂过程区不设约束条件,基于上述边界条件,其相应的平衡方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1a} & \sigma_{2a} & \cdots & \sigma_{6a} \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_6 \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & \cdots & T_{36} \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_6 \\ T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

由矩阵可以得到 $[X_i] = [2.402 \ 4 \ 0.010 \ 7 \ -1.688 \ 7 \ 8.157 \ 1 \ 0.000 \ 9 \ 0.750 \ 2 \ -1.895 \ 5]$ 。上述方程中的 X_i 为各基本应力函数在解中的权重,通过叠加即可以得到图 1 所示问题的应力函数和位移函数。

3 算例

一混凝土简支梁,高度 $H=8$ cm,宽度 $B=7.5$ cm,长度 $L=30$ cm,裂缝长度 1 cm,混凝土抗拉强度 $f_t=5.6$ MPa,泊松比 $\nu=0.2$,弹性模量 $E=28$ GPa。

由应力函数得出沿 y 轴的正应力分布及断裂过程区的拉应变软化曲线,分别如图 5 和图 6 所示。从图 5 可以看出,裂纹尖端应力奇异性被消除;应力最大值出现在断裂过程区尖端;满足正应力合力为零的条件;裂纹面上正应力不等于零,但波动幅度不大。从图 6 看出,一次权函数型与内聚力水压力型的拉应变软化曲线相似;内聚力恒定型的最大张开位移远小于一次权函数型和内聚力水压力型。梁的自振频率和断裂能如表 1 所示,带裂缝简支梁自振频率低于无裂缝简支梁,恒定型自振频率高于水压力型与一次权函数型。

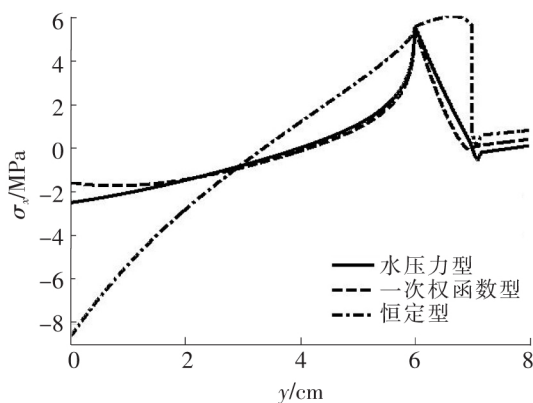


图 5 沿断裂韧带正应力分布

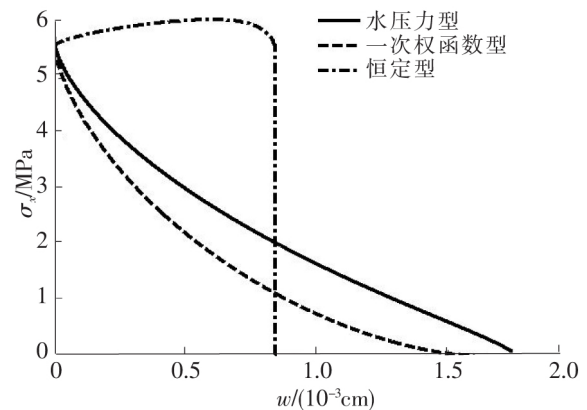


图 6 拉应变软化曲线

考察了梁顶和梁底面切应力的分布,其值不完全为零,切应力最大值与抗拉强度比值分别为 4.8%和 7.3%。

表 1 简支梁的自振频率和断裂能

类型	自振频率/Hz	断裂能/(kN·m ⁻¹)
无裂纹	0.126	—
恒定型	0.114	4.722
水压力型	0.091	3.683
一次权函数型	0.094	3.450

4 结论

研究了含切口和断裂过程区简支梁的解析,给出了算例,结论如下:

(1)采用函数叠加和选点法得到了带裂缝和断裂过程区简支梁在均布荷载下的全场解析解,基本满足应力边界条件;随着选点数量的增加,可以进一步提高计算精度。

(2)内聚力呈水压力型分布与一次权函数下拉应变软化曲线有相似的变化趋势;内聚力恒定型断裂能最大,水压力型与权函数型断裂能较小且数值相近。

(3)无裂缝简支梁自振频率最高,内聚力恒定型次之,水压力型和一次权函数型时最低。

参 考 文 献

- [1]Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits[J]. Mech. Phys. Solids, 1960(8):100-104.
- [2]Li Wu, Xie Lingyun. A Dugdale-Barenblatt model for a strip with a semi-infinite crack embedded in decagonal quasicrystals[J]. Chin. Phys. B, 2013, 22(3):1-6.
- [3]杨林. 带单边裂纹的有限狭长体的 Dugdale-Barenblatt 模型[J]. 山东大学学报:理学版, 2013, 48(8): 63-67.
- [4]王慧晶, 林哲. 塑性区模型损伤修正及其对声发射活动的影响[J]. 船舶力学, 2011, 15(4):389-393.
- [5]Hillerborg A. Analysis of fracture by means of the fictitious crack model particularly for fiber-reinforced concrete[J]. Int. J. Cement Compos, 1980,2(4): 177-184.
- [6]Bazan Z P,OH B H. Crack band theory for fracture of concrete[J]. Mater. Struct., 1983(16):155-177.
- [7]Duan S J, Nakagawa K. Stress functions with finite stress concentration at the crack tips for central cracked panel[J]. Engng Fracture Mech, 1988, 29(5): 517-526.
- [8]Duan Shujin, Nakagawa K. A mathematical approach of fracture macromechanics for strain-softening material[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1989,34(5/6): 1175-1182.
- [9]段树金. 断裂过渡区长度张开位移和 J 积分的计算[J]. 石家庄铁道学院学报, 2000,13(3):6-9.
- [10]段树金. 断裂过程区解析理论[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2013.
- [11]郭全民, 段树金. 混凝土简支梁在均布荷载作用下的断裂过程区及自振特性[J]. 石家庄铁道大学学报:自然科学版, 2017, 30(2): 6-10.

Study on Influence of the Cohesion in Fracture Process Zone Cohesion Distribution on the Stiffness and Natural Vibration Frequency of Simply Supported Beam

Xie Yuanheng, Duan Shujin, Hou Yongkang, An Ruimei

(School of Civil Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: To solve the uniformly distributed load problem of simply supported beam with an

(下转第 14 页)

- [6]席宏正, 焦胜, 鲁利宇. 夏热冬冷地区城市自然通风廊道营造模式研究[J]. 城乡规划, 2010, 10(2): 106-107.
- [7]Kress R. Regionale air exchange processes and their importance for the R • Umliche planning[M]. Dortmund: Institute of Environmental Protection of the University of Dortmund, 1979.
- [8]八都县市首脑会议环境问题对策委员会干事会. “风之道”调查研究—调查报告书[R]. 日本: 八都县市首脑会议环境问题对策委员会干事会, 2007.
- [9]任超, 袁超, 何正军, 等. 城市通风廊道研究及其规划应用[J]. 城市规划学刊, 2014, 10(3): 52-60.
- [10]李军, 荣颖. 城市风道及其建设控制设计指引[J]. 城市问题, 2014, 16(9): 42-47.
- [11]段昊书, 李竞. “城市风道”可引风驱霾[N]. 中国气象报, 2014-07-04.
- [12]中华人民共和国住房和城乡建设部. GB 50009—2012 建筑结构荷载规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012.
- [13]中华人民共和国住房和城乡建设部. JGJ/T 338—2014 建筑工程风洞试验方法标准[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014.

The Effect of Buildings and Air Path on City Ventilation

Tian Kaiqiang¹, Lu Zhaoliang¹, Liu Qingkuan^{2, 3}

(1. School of Civil Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

2. Structural Health Monitoring and Control Institute, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

3. Hebei Province Key Lab of Structural Health Monitoring and Control, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: Haze has gradually become one of the most concerned problems in recent years, and has seriously plague the normal work and life of people in northern China. In order to solve haze problem and improve city ventilation, buildings height control and air path construction have been reported as solutions besides carbon emission reduction, while their effects are worth studying. By use of the load code for the design of building structures, wind velocity distribution in different height under different terrain roughness was analyzed. The wind velocity in country and city were compared, and the effect of city buildings on reduction degree of wind velocity was analyzed. Moreover, the effect of air path was discussed. Results show that either reducing the height of urban buildings or opening up urban air ducts, the effect on increasing wind speed near the ground is very limited.

Key words: city building; air path; city ventilation; load code for the design of building structures

(上接第 5 页)

edge-crack and the fracture process zone, the stress functions of four kinds of basic problems are chosen, including the infinite plate with symmetrical edge cracks under bending moment and tensile stresses, the simply supported beam under the uniform load, the semi-infinite plate under distributed shear stresses, and the infinite plate under distributed shear stresses tensile stress. Based on the Duan and Nakagawa's model, a group of analytic solutions of a simply supported beam with the fracture process zone is yielded through mathematical analysis and point selection method. The obtained tensile strain softening curves and natural vibration frequencies of the simply supported beam are compared with the different cohesive distribution with water pressure type, constant type, and the assumed weight function being linear in fracture process zone. The tensile strain softening curve of the water pressure distribution is similar to the one under the linear weight function. The frequency of non-cracked simply supported beam is the biggest; the cohesion constant type is the second; and the water pressure type of cohesive and the one under the linear weight function are the lowest.

Key words: simply supported beam; fracture process zone; stress function; tensile strain softening curve; natural vibration characteristics