

三台可拒绝平行机在线排序问题的近似算法

荣建华¹, 侯丽英²

(1. 石家庄铁道大学 四方学院, 河北 石家庄 051132; 2. 南京农业大学 理学院, 江苏 南京 210095)

摘要:研究了工件带有拒绝费用的3台平行机在线算法, 假定有3台平行机 M_1, M_2, M_3 , n 个工件 $J_1, J_2, \dots, J_n$, 每个工件可以被接收加工, 消耗一定的加工时间 t_j ; 也可以被拒绝, 但要付出相应的拒绝费用 p_j , 目标为被接收工件的最大完工时间(makespan)与被拒绝工件的总罚值之和最小。进一步, 假定每个工件有两套拒绝策略, 最后输出目标值较好的一种。文中设计出在线算法 H , 并证明算法的竞争比为 $\frac{15}{8}$ 。

关键词:同型机; 拒绝费用; 中断加工; 运筹学; 在线排序; 竞争比

中图分类号:O223 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-0373(2017)02-0101-05

0 引言

在经典的排序文献中, 所有的工件都不允许被拒绝, 换言之, 任何工件都必须被安排到机器上进行加工。然而在工厂实际生产过程中, 生产决策者们并非总是如此。在现有的生产资源有限的前提下, 为了使企业获得更多的利润, 生产厂家有时不得不拒绝一些资源耗费较多但带来的利润却较少的工件, 所以工件带拒绝费用的排序问题受到研究人员广泛的关注。本文主要研究了工件带拒绝费用的3台平行机在线排序问题。基本模型描述如下: 设有3台机器 M_1, M_2, M_3 和 n 个工件 $J_1, J_2, \dots, J_n$, 每台机器的加工速度相同, 每个工件 J_j 带两个参数 (t_j, p_j) , t_j 表示其加工时间, p_j 表示其拒绝费用。当工件 J_j 到达后, 生产决策者需马上做出决定, 工件可以被拒绝, 但要付出一定的拒绝费用; 也可以选择被加工, 花费一定的加工时间。目标为拒绝工件的总拒绝费用与加工工件的最晚完工时间(makespan)之和最小。进一步, 当工件被拒绝时文中设计出 H_1, H_2 两套拒绝策略, 且两种拒绝策略相互独立, 最后输出目标值较好的一种。

对于加工不可中断的带拒绝费用的平行机在线排序问题(简记成MSR), 最早由文献[1]提出, 文中针对任意的机器台数 m , 设计出算法 $RTP(\alpha)$, 并证明算法的竞争比为 $1+\varphi \approx 1.618$, 其中 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为黄金数。特别地, 当机器数 $m=2$ 时, 设计出算法 $RP(\alpha)$, 并证明其竞争比为 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$, 此时算法达到最优。当机器数 $m=3$ 时, 构造出算法并证明了竞争比为2, 下界为1.839。另外, 文献[2-3]分别讨论了一类特殊情形的可拒绝平行机排序, 每个工件的长度与拒绝费用事先成固定比例, 即 $p_j = \alpha t_j$ 。当机器数 $m=2$ 时, 文献[2]设计出在线算法NPRL, 证明算法的竞争比 ρ_{NPRL} 和下界均为关于参数 α 的分段函数。且当 $\alpha \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [1+\infty)$ 时算法已达到最优。当机器数 $m=3$ 时, 文献[3]设计出在线算法PRL, 证明算

收稿日期: 2016-06-01 责任编辑: 刘宪福 DOI: 10.13319/j.cnki.sjztdxxb.2017.02.18

基金项目: 南京农业大学青年科技创新基金(0506J0116) 河北省高等教育教学改革研究与实践项目(2015GJJG293); 河北省高等教育科学研究课题(GJXH2015-291)

作者简介: 荣建华(1981-), 女, 硕士, 讲师, 主要从事组合最优化、近似算法、排序论的研究。E-mail: rongjianhua2006@126.com

荣建华, 侯丽英. 三台可拒绝平行机在线排序问题的近似算法[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2017, 30(2): 101-104.

法的竞争比 ρ_{PRL} 和下界均为关于参数 T 的分段函数。且当 $T \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \infty\right)$ 时算法最优。

带拒绝费用且允许多种策略下的平行机在线排序问题, 由于它的组合结构比较复杂, 目前研究的结果很少。对于可中断加工的且带拒绝费用的平行机半在线排序问题, 文献[4]对于机器台数 $m=2$ 时, 设计出半在线算法 PRH, 同时给出问题的下界, 且当 $\alpha \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, +\infty\right)$ 时算法达到最优; 文献[5]研究了一种新的带拒绝的 2 台平行机半在线排序, 文中两种拒绝策略独立运行, 且加工不可中断, 最后取目标值较好的方案, 文中设计出竞争比为 $\frac{3}{2}$ 的半在线算法 H , 下界为 1.366。文献[6]进一步将上述模型推广到两台同类机情形, 文中设计出竞争比为 $\frac{s+2}{s+1}$ 的半在线算法, 其结果要严格小于经典的只有一种拒绝策略的情形。本文是基于文献[1]的基础上, 讨论了带两个拒绝策略的 3 台平行机在线排序问题, 设计出竞争比为 $\frac{15}{8}$ 的在线算法 H , 此结果严格小于文献[1]中只有一种拒绝策略的 3 台平行机模型下的竞争比 2。

1 H 算法

为了便于设计算法和分析竞争比, 下面对文中涉及到的符号作统一规定:

J 为工件集; H_1 为 H 算法的第一套策略方案; H_2 为 H 算法的第二套策略方案; R 为 H_1 策略中被拒绝的工件集; A 为 H_1 策略中被接受的工件集; B 为 H_2 策略中被接受的工件集; S 为 H_2 策略中被拒绝的工件集; A_1 为策略 H_1 和最优解中均被接受的工件集; A_2 为策略 H_1 接受而最优解中拒绝的工件集; R_1 为策略 H_1 和最优解中均被拒绝的工件集; R_2 为策略 H_1 拒绝而最优解中接受的工件集; B_1 为策略 H_2 和最优解中均被接受的工件集; B_2 为策略 H_2 接受而最优解中拒绝的工件集; S_1 为策略 H_2 和最优解中均被拒绝的工件集; S_2 为策略 H_2 拒绝而最优解中接受的工件集; $L(S)$ 为 S 中所有工件的加工总长度; $P(S)$ 为 S 中所有工件的总拒绝费用; W_H 为算法生成的目标值; W_{OPT} 为最优目标值; W_{H_i} 为策略 H_i 生成的目标值; (注: $A=A_1 \cup A_2, R=R_1 \cup R_2, B=B_1 \cup B_2, S=S_1 \cup S_2, \bar{A}=A_1 \cup R_2=B_1 \cup S_2, \bar{R}=R_1 \cup A_2=S_1 \cup B_2$)。

H 算法

(1) 策略 H_1 : 如果 $p_j \leq \frac{1}{3}t_j$, 拒绝此工件, 否则将按 LS 规则安排加工。

策略 H_2 : 如果 $p_j \leq \frac{8}{15}t_j$, 拒绝此工件, 否则将按 LS 规则安排加工。

(2) 最终取目标值较好的方案。

定理 1 H 算法的竞争比为 $\frac{15}{8}$, 且为紧界。

证明 情形 1: 首先讨论由策略 H_1 生成的排序。

子情形 1.1: 如果所有工件均被拒绝, 则有

$$W_{H_1} = P(J) = P(\bar{A} \cup \bar{R}) = P(\bar{A}) + P(\bar{R}) \leq \frac{1}{3}L(\bar{A}) + P(\bar{R}) \leq C(\bar{A}) + P(\bar{R}) = W^{OPT} < \frac{15}{8}W^{OPT}。$$

子情形 1.2: 假定不是所有工件被拒绝, 令 x 为策略 H_1 中最后一个完工工件, 由 LS 规则:

$$\begin{aligned} W_{H_1} &= C(A) + P(R) \leq \frac{1}{3}L(A \setminus \{x\}) + t_x + P(R) = \\ &= \left[\frac{1}{3}L(A_1 \setminus \{x\}) + P(R_2) \right] + \left[\frac{1}{3}L(A_2 \setminus \{x\}) + P(R_1) \right] + t_x \leq \\ &= \left[\frac{1}{3}L(A_1 \setminus \{x\}) + \frac{1}{3}L(R_2) \right] + [P(A_2 \setminus \{x\}) + P(R_1)] + t_x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}L(A_1 \cup R_2 \setminus \{x\}) + P(A_2 \cup R_1 \setminus \{x\}) + t_x = \\ & \frac{1}{3}L(\bar{A} \setminus \{x\}) + P(\bar{R} \setminus \{x\}) + t_x \end{aligned} \quad (1)$$

子情形 1.2.1: 如果 x 在最优解中被接收, 即 $x \in \bar{R}$ 。

$$\begin{aligned} W_{H_1} & < \frac{1}{3}L(\bar{A} \setminus \{x\}) + P(\bar{R}) + t_x = \frac{1}{3}L(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{2}{3}t_x \leq \\ & C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{2}{3}t_x \leq W^{OPT} + \frac{2}{3}W^{OPT} = \frac{5}{3}W^{OPT} < \frac{15}{8}W^{OPT} \end{aligned} \quad (2)$$

子情形 1.2.2: 如果 x 在最优解中被拒绝, 即 $x \in \bar{R}$

$$W_{H_1} < \frac{1}{3}L(\bar{A}) + P(\bar{R} \setminus \{x\}) + t_x \leq C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + 2p_x = W^{OPT} + 2p_x \quad (3)$$

情形 2: 其次讨论由策略 H_2 生成的排序。

子情形 2.1: 如果所有工件均被拒绝, 则有

$$W_{H_2} < P(J) = P(\bar{A} \cup \bar{R}) = P(\bar{A}) + P(\bar{R}) \leq \frac{8}{15}L(\bar{A}) + P(\bar{R}) \leq \frac{8}{5}C(\bar{A}) + P(\bar{R}) \leq \frac{8}{5}W^{OPT} < \frac{15}{8}W^{OPT}。$$

子情形 2.2: 如果不是所有工件均被拒绝, 令 y 为策略 H_2 中最后一个完工工件, 由 LS 规则

$$\begin{aligned} W_{H_2} & = C(B) + P(S) \leq \frac{1}{3}L(B \setminus \{y\}) + t_y + P(S) = \\ & \frac{1}{3}L(B_1 \setminus \{y\}) + \frac{1}{3}L(B_2 \setminus \{y\}) + P(S_1) + P(S_2) + t_y \leq \\ & \left[\frac{1}{3}L(B_1 \setminus \{y\}) + \frac{8}{15}L(S_2) \right] + \frac{1}{3} \times \frac{15}{8}P(B_2 \setminus \{y\}) + P(S_1) + t_y \leq \\ & \frac{8}{15}L(B_1 \cup S_2 \setminus \{y\}) + P(B_2 \cup S_1 \setminus \{y\}) + t_y = \\ & \frac{8}{15}L(\bar{A} \setminus \{y\}) + P(\bar{R} \setminus \{y\}) + t_y \end{aligned} \quad (4)$$

子情形 2.2.1: 如果 y 在最优解中被接收, 即 $y \in \bar{A}$ 。

$$W_{H_2} < \frac{8}{15}L(\bar{A} \setminus \{y\}) + P(\bar{R}) + t_y \leq \frac{8}{5}C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{7}{15}t_y \quad (5)$$

子情形 2.2.2: 如果 y 在最优解中被拒绝, 即 $y \in \bar{R}$ 。

$$W_{H_2} < \frac{8}{15}L(\bar{A}) + P(\bar{R} \setminus \{y\}) + \frac{15}{8}p_y \leq \frac{8}{15}L(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{7}{8}p_y \leq \frac{8}{5}C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{7}{8}p_y \quad (6)$$

上述由策略 H_1, H_2 生成的表达式分别为: 式(2)式(3)式(5)式(6), 只需证明至少有一种情形产生的竞争比为 $\frac{8}{15}$ 。如果式(2)发生, 则由策略 H_1 生成的算法是成立的。如果式(2)没有发生, 则式(3)必发生, 即 x 在最优解中被拒绝 $x \in \bar{R}$, 在此情形下分别讨论由策略 H_2 产生的表达式(5)式(6)。

(1) 若式(5)成立, 即 $y \in \bar{A}, x \in \bar{R}$, 且 $x \neq y$ 。有 $W_{OPT} \geq p_x + t_y$ 。

① 若 $p_x \leq \frac{7}{9}t_y, W_{OPT} \geq p_x + t_y \geq \frac{16}{7}p_x$, 由式(3)有 $W_H = W_{H_1} \leq W_{OPT} + \frac{7}{8}W_{OPT} = \frac{15}{8}W_{OPT}$ 。

② 若 $p_x > \frac{7}{9}t_y$, 即 $t_y \leq \frac{9}{16}W_{OPT}$, 结合式(5)有

$$W_H = W_{H_2} \leq \frac{8}{5}C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{7}{15}t_y \leq \frac{8}{5}W_{OPT} + \frac{7}{15} \times \frac{9}{16}W_{OPT} = \frac{149}{80}W_{OPT} < \frac{15}{8}W_{OPT}。$$

(2) 若式(6)发生, 即 $x \in \bar{R}, y \in \bar{R}$ 时

① 当 $x \neq y$ 时, $W_{OPT} = C(\bar{A}) + P(\bar{R}) \geq P(\bar{R}) \geq p_x + p_y$

若 $p_x \leq \frac{1}{2}p_y, W_{OPT} \geq p_x + p_y \geq 3p_x$, 由式(3)有 $W_H = W_{H_1} \leq W_{OPT} + 2 \times \frac{1}{3}W_{OPT} = \frac{5}{3}W_{OPT} < \frac{15}{8}W_{OPT}$ 。

若 $p_x > \frac{1}{2}p_y \geq 0$, 则

$$\frac{W_H}{W_{OPT}} = \frac{W_{H_2}}{W_{OPT}} \leq \frac{\frac{8}{5}C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{7}{8}p_y}{C(\bar{A}) + P(\bar{R})} \leq 1 + \frac{\frac{3}{5}C(\bar{A}) + \frac{7}{8}p_y}{C(\bar{A}) + p_x + p_y} \leq 1 + \frac{\frac{3}{5}C(\bar{A}) + \frac{7}{8}p_y}{C(\bar{A}) + \frac{3}{2}p_y}$$

由于上式为关于 p_y 的单减函数, 当 $p_y = 0$ 时取最大值, 所以 $\frac{W_H}{W_{OPT}} \leq 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} < \frac{15}{8}$ 。

②当 $x = y$ 时, 即 $p_x > \frac{8}{15}t_x$, 由①:

$$W_H = W_{H_1} \leq \frac{1}{3}L(\bar{A} \setminus \{x\}) + P(\bar{R} \setminus \{x\}) + t_x \leq \frac{1}{3}L(\bar{A}) + P(\bar{R}) - p_x + \frac{15}{8}p_x \leq C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{7}{8}p_x = W_{OPT} + \frac{7}{8}W_{OPT} = \frac{15}{8}W_{OPT}。$$

以下实例说明上述界是紧的: 取 $J = (1, \frac{8}{15} + \epsilon)$, 由算法可知, 无论策略 H_1 还是策略 H_2 均将其接收,

而最优解将此工件拒绝, 于是 $\frac{W_H}{W_{OPT}} = \frac{1}{\frac{8}{15} + \epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{15}{8}$ 。证毕。

2 结语

讨论了带两种拒绝策略的 3 台平行机在线排序问题, 由于在拒绝策略上允许有两种尺度独立运行, 故该模型属于加工规则比严格的在线情形有所松弛的排序问题, 文中设计出竞争比为 $\frac{15}{8}$ 的在线算法 H , 此结果严格小于经典的只有一种拒绝策略的 3 台平行机排序所得的竞争比 2。进一步说明采用多种策略能设计出比严格的在线情形性能比更好的算法。下一步将构造更好的算法以便得出更好的上界。

参 考 文 献

- [1] Bartal Y, Leonardi S, Marchetti-Spaccamela A, et al. Multiprocessor scheduling with rejection [J]. Siam Journal on Discrete Mathematics, 2000, 13(1): 64-78.
- [2] 闵啸. 一特殊情形不可中断的两台可拒绝同型平行机在线排序问题[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(6): 163-169.
- [3] 闵啸. 一特殊情形的三台可拒绝同型机在线排序问题[J]. 嘉兴学院学报, 2006, 18(3): 44-47.
- [4] 闵啸, 张玉才. 一个可中断两台可拒绝同型机半在线排序问题[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2007, 34(5): 509-514.
- [5] MIN Xiao, KONG Xiangqing. Semi on-line scheduling on two identical machines with rejection[J]. OR Transactions, 2009, 13(1): 29-36.
- [6] 闵啸, 刘静, 王玉青. 两台可中断同类机可拒绝半在线排序问题的近似算法[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2010, 37(5): 519-523.
- [7] 荣建华, 侯丽英. 带拒绝费用的平行机在线排序[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2016, 29(2): 107-110.

(下转第 110 页)

ser-deposited Ni-Cr-B-Si-C alloys [J]. JOM, 2013, 65(6):741-748.

[10] Hemmati I, Ocelik V, Csach K, et al. Microstructure and phase formation in a rapidly solidified laser-deposited Ni-Cr-B-Si-C hardfacing alloy [J]. Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science, 2014, 45 (2):878-892.

[11] Yu T, Deng Q L, Dong G, et al. Influence of Ta on microstructure and abrasive wear resistance of laser clad NiCrSiB coating [J]. Journal of WuHan University of Technology, Materials Science Edition, 2013, 28(3):437-443.

Effects of Nb on Microstructure and Abrasive Wear Resistance of Laser Clad Ni60 Alloy Coating

Wu Wentao, Zhang Yang, Song Bohan

(School of Materials Science and Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: Laser deposited coatings were made from Ni60 alloy and Nb-modified Ni60 alloy using laser cladding with powder injection. The effect of Nb on microstructure, phase composition and wear property of the composite coating were investigated by means of scanning electron microscopy (SEM), energy dispersive spectroscopy (EDS), electron backscatter diffraction (EBSD) and wear test. Addition of Nb was done to decrease the structural scale of CrB precipitates by providing Nb-rich nucleation agents. The growth of Cr_7C_3 was suppressed in the coating, resulting in a decrease in aspect ratio of coarse carbide. Compared with the pure Ni60 alloy coating, the microhardness of the Nb-modified composite coating was decreased about 33%, but the wear resistance of the Nb-modified composite coating was increased five times.

Key words: laser cladding; Ni-based alloy; NbC; wear resistance

(上接第 104 页)

On-line Scheduling on Three Identical Machines with Rejection

Rong Jianhua¹, Hou Liying²

(1. Department of Basic Courses, Shijiazhuang Tiedao University Sifang College, Shijiazhuang 051132, China;

2. College of Sciences, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

Abstract: This paper investigates the on-line scheduling problem on three identical machines with rejection. An identical processors system denoted by M_1, M_2, M_3 and a sequence of independent jobs J_1, J_2, J_n are given. When a job arrives, we can either reject it, in which case we pay its penalty, or accept it in which case it contributes its processing time to the makespan of the constructed schedule. The objective is to minimize the sum of the makespan of the schedule of all accepted jobs and the penalties of all rejected jobs. In addition, two schemes could be chosen and we can select the better solution finally. We present an approximation algorithm with competitive ratio $\frac{15}{8}$.

Key words: identical machine; rejection; preemptive; operations research; on-line scheduling; competitive ratio