第29卷 第4期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 29 No. 4
2016年12月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Dec. 2016

一个能量与位势相依的二阶谱问题及其相关的发展方程族

张瑞君[1]， 刘亚峰[2]

(1.河北工业大学 理学院，天津 300401;2.石家庄铁道大学 数理系,河北 石家庄 050043)

摘要:本文将研究一个二阶谱系及相关的非线性发展方程及其 Hamilton 系统,利用 Lax 对非线性化方法,讨论经典力学的 Jacobi-Ostrogradsky 坐标,得到 Bargmann 约束下完全可积的 Hamilton 系统,通过 Bargmann 约束,从而给出发展方程族解的对合表示。

关键词:谱问题; Lax 对非线性化;Bargmann 约束;可积系统

中图分类号:O175.9 **文献标志码**:A **文章编号**:2095-0373(2016)04-0105-04

0 引言

非线性发展方程与有限维完全可积 Hamilton 系统之间的关系是数学物理研究的一个十分重要的内容。Lax 对非线性化[1]是一个有效的获得有限维可积系统的方法,近年来被广泛用于求解非线性发展方程[2-4],特别是孤子方程。本文研究一个新的二阶谱问题,得到一类 HD 型非线性发展方程族。通过将 Lax 对非线性化方法获得有限维 Hamilton 系统,并证明此系统在 Liouville 意义下的完全可积,进而由其 Bargmann 约束给出非线性发展方程解的表示。

1 谱问题及对应的发展方程族及 Lax 表示

讨论二阶线性谱问题

$$L\varphi = \varphi_{xx} + \lambda^2 u\varphi + \lambda\nu\varphi = 2\lambda\varphi_x \tag{1}$$

式中,$u=u(x,t)$,$v=v(x,t)$为谱问题的位势函数;λ,φ 分别为特征值及对应的特征函数。

在基础空间 $\Omega=(-\infty,+\infty)$上讨论谱问题(1),假设 u,ν,φ 及其导数在 $x\to\pm\infty$时速降。

命题1 (1)如下二阶谱问题构成完整谱系

$$\begin{cases} L\varphi = (\partial^2 + \lambda^2 u + \lambda\nu)\varphi = 2\lambda\varphi_x \\ \bar{L}\psi = (\partial^2 + (\lambda^*)^2 u + (\lambda^*)\nu)\psi = -2\lambda^*\psi_x \end{cases} \tag{2}$$

(2)若 φ,ψ 是谱系(2)的特征值 λ 所对应的特征函数,则

$$\mathrm{grad}\lambda = \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta\nu \\ \delta\lambda/\delta u \end{pmatrix} = \left(\int_\Omega 2\varphi_x\psi \mathrm{d}x\right)^{-1}\begin{pmatrix} \lambda\varphi\psi \\ \lambda^2\varphi\psi \end{pmatrix} \tag{3}$$

设谱问题(1)的辅谱问题为 $\varphi_{t_m}=w_m\varphi$,其中

$$w_m = \sum_{j=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}b_{jx} - \lambda b_j + b_j\partial\right)\lambda^{m-j+1} \tag{4}$$

令 $g_j=(b_j,b_{j+1})^{\mathrm{T}}$,$j=-1,0,1,2,\cdots,m$,则由相容性条件 $\varphi_{xxt}=\varphi_{txx}$,得如下递推关系

$$Kg_j = Jg_{j+1}, j=-1,0,1,2,\cdots,m-1 \tag{5}$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\partial^3 \\ \frac{1}{2}\partial^3 & \nu\partial + \partial\nu \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial^3 & 0 \\ 0 & 2\partial - u\partial - \partial u \end{pmatrix} \tag{6}$$

收稿日期:2016-04-05 责任编辑:刘宪福 DOI:10.13319/j.cnki.sjztddxxbzrb.2016.04.18

作者简介:张瑞君(1991-),女,硕士研究生,主要从事基础数学的研究。E-mail:952564326@qq.com

张瑞君,刘亚峰.一个能量与位势相依的二阶谱问题及其相关的发展方程族[J].石家庄铁道大学学报:自然科学版,2016,29(4):105-108.

直接计算可知

$$K\ \mathrm{grad}\,\lambda=\lambda J\ \ \mathrm{grad}\,\lambda \tag{7}$$

取 $g_{-1}=(b_{-1},b_0)^{\mathrm{T}}=(0,(1-u)^{-\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}$，则有 $Jg_{-1}=0$，

并由(5)得到递推序列$\{g_j,j=1,2,\cdots\}$。

定理2 在等谱($\lambda_t=0$)条件下，非线性发展方程族为

$$(v_{t_m},u_{t_m})^{\mathrm{T}}=Kg_{m-1}=Jg_m,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{8}$$

对应的 Lax 对为

$$\begin{cases}L\varphi=\lambda\varphi\\ \varphi_{t_m}=\omega_m\varphi,\end{cases}\quad m=0,1,2,\cdots \tag{9}$$

显然，这是一个 HD 型非线性发展方程族。特别，当 $m=0$ 时，发展方程为

$$\begin{cases}v_{t_0}=\dfrac{15}{16}(u_x)^3(1-u)^{-\frac{7}{2}}+\dfrac{9}{8}u_xu_{xx}(1-u)^{-\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{4}u_{xxx}(1-u)^{-\frac{3}{2}}\\ u_{t_0}=v_x(1-u)^{-\frac{1}{2}}+vu_x(1-u)^{-\frac{3}{2}}\end{cases} \tag{10}$$

当 $m=1$ 时，发展方程为

$$\begin{cases}v_{t_1}=\dfrac{9}{8}u_xv_{xx}(1-u)^{-\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{4}v_{xxx}(1-u)^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{8}u_{xxx}v(1-u)^{-\frac{5}{2}}+\dfrac{9}{8}u_{xx}v_x(1-u)^{-\frac{5}{2}}+\\ \quad\dfrac{45}{16}u_xu_{xx}v(1-u)^{-\frac{7}{2}}+\dfrac{35}{16}(u_x)^2v_x(1-u)^{-\frac{7}{2}}+\dfrac{105}{32}(u_x)^3v(1-u)^{-\frac{9}{2}}\\ u_{t_1}=\dfrac{15}{16}(u_x)^3(1-u)^{-\frac{7}{2}}+\dfrac{9}{8}u_xu_{xx}(1-u)^{-\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{4}u_{xxx}(1-u)^{-\frac{3}{2}}+\\ \quad\dfrac{3}{2}v_xv(1-u)^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{2}u_xv^2(1-u)^{-\frac{5}{2}}\end{cases} \tag{11}$$

2 Bargmann 系统与 Hamilton 正则系统

设谱系(2)的 N 个不同的特征值为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_N$，$\varphi_j,\psi_j$ 为对应于 λ_j，$j=1,2,\cdots,N$ 的特征函数，令 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$，$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N)^{\mathrm{T}}$，$\psi=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_N)^{\mathrm{T}}$。

命题3 设 $G_j=(<\Lambda^j\varphi,\psi>,<\Lambda^{j+1}\varphi,\psi>)$，则

$$KG_j=JG_{j+1}。$$

令 $g_0=G_0$，构造 Bargmann 约束[1]

$$u=1-\langle\Lambda\varphi,\psi\rangle^{-2},v=2\langle\Lambda^2\varphi,\psi\rangle\langle\Lambda\varphi,\psi\rangle^{-3} \tag{12}$$

由此，谱系(2)等价于如下 Bargmann 系统

$$\begin{cases}\varphi_{xx}+\Lambda^2\varphi-\Lambda^2\langle\Lambda\varphi,\psi\rangle^{-2}\varphi+2\Lambda\langle\Lambda^2\varphi,\psi\rangle\langle\Lambda\varphi,\psi\rangle^{-3}\varphi=2\Lambda\varphi_x\\ \psi_{xx}+\Lambda^2\psi-\Lambda^2\langle\Lambda\varphi,\psi\rangle^{-2}\psi+2\Lambda\langle\Lambda^2\varphi,\psi\rangle\langle\Lambda\varphi,\psi\rangle^{-3}\psi=-2\Lambda\psi_x\end{cases} \tag{13}$$

现在寻找 Bargmann 系统(13)对应的 Hamilton 系统的 Jacobi-Ostrogradsky 坐标。

定义 Lagrange 函数

$$\hat{I}=\int_\Omega I\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

其中

$$I=\langle\Lambda^2\varphi,\psi\rangle\langle\Lambda\varphi,\psi\rangle^{-2}-\langle\Lambda^2\varphi,\psi\rangle-\langle\Lambda\varphi,\psi_x\rangle+\langle\varphi_x,\psi_x\rangle+\langle\Lambda\varphi_x,\psi\rangle \tag{15}$$

命题4 Bargmann 系统(13)等价于如下 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\delta\hat{I}}{\delta\varphi}=0,\quad \frac{\delta\hat{I}}{\delta\psi}=0 \tag{16}$$

设 y_1,y_2 为广义坐标，z_1,z_2 为广义动量，Hamiltom 函数 $h=\sum\limits_{j=1}^{2}\langle y_{jx},z_j\rangle-I$。

则 y_1,y_2,z_1,z_2 满足如下方程[5]

$$y_{jx}=\{y_j,g\}=\frac{\partial h}{\partial z_j},\quad z_{jx}=\{z_j,g\}=-\frac{\partial h}{\partial y_j}\quad j=1,2 \tag{17}$$

由文献[4]的方法,得

$$dI=\sum_{j=1}^{2}(-\langle z_{jx},dy_j\rangle+\langle y_{jx},dz_j\rangle)。$$

若取 $y_1=\varphi, y_2=\psi$,直接计算得 $z_1=\psi_x+\Lambda\psi, z_2=\varphi_x-\Lambda\varphi$。

构造 Jacobi-Ostrogradsky 坐标如下

$$q_1=y_1, q_2=z_2, p_1=-z_1, p_2=y_2 \tag{18}$$

在坐标系(18)下,Bargmann 约束化为

$$u=1-\langle\Lambda q_1,p_2\rangle^{-2}, v=2\langle\Lambda^2 q_1,p_2\rangle\langle\Lambda q_1,p_2\rangle^{-3} \tag{19}$$

由此 Bargmann 系统(13)等价于如下 Hamilton 正则系统

$$q_{jx}=\{q_j,g\}=\frac{\partial h}{\partial p_j},\quad p_{jx}=\{p_j,g\}=-\frac{\partial h}{\partial q_j}\quad j=1,2 \tag{20}$$

此时

$$h=-\langle q_2,p_1\rangle-\langle\Lambda q_2,p_2\rangle-\langle\Lambda q_1,p_2\rangle-\langle\Lambda^2 q_1,p_1\rangle\langle\Lambda q_1,p_2\rangle^{-2} \tag{21}$$

3　Hamilton 系统的完全可积性

在 Bargmann 约束(19)和 Jacobi-Ostrogradsky 坐标(18)下,发展方程族的 Lax 对(9)非线性化为如下矩阵形式[1,4]

$$\begin{cases}Q_x=MQ, P_x=-M^{\mathrm{T}}P;\\ Q_{t_m}=V_mQ, P_{t_m}=-V_m^{\mathrm{T}}P;\end{cases}\quad m=0,1,2,\cdots \tag{22}$$

其中

$$\begin{cases}Q=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi_x-\Lambda\varphi\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\psi_x-\Lambda\psi\\ \psi\end{pmatrix}\\ M=\begin{pmatrix}\Lambda & E\\ \Lambda^2-\Lambda^2u-\Lambda v & \Lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda & E\\ \alpha & \Lambda\end{pmatrix}\end{cases} \tag{23}$$

$$\alpha=\Lambda^2\langle\Lambda q_1,p_2\rangle^{-2}-2\Lambda\langle\Lambda^2 q_1,p_2\rangle\langle\Lambda q_1,p_2\rangle^{-3}, V_m=(\omega_{ij}^m)_{2\times 2}, i,j=1,2; m=0,1,2,\cdots。$$

$$\omega_{11}^m=\sum_{j=0}^{m}-\frac{1}{2}b_{jx}\Lambda^{m-j+1}=\sum_{j=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}\langle\Lambda^{j+1}q_2,p_2\rangle+\frac{1}{2}\langle\Lambda^{j+1}q_1,p_1\rangle\right)\Lambda^{m-j+1};$$

$$\omega_{12}^m=\sum_{j=0}^{m}b_j\Lambda^{m-j+1}=\sum_{j=0}^{m}\langle\Lambda^{j+1}q_1,p_2\rangle\Lambda^{m-j+1};$$

$$\omega_{21}^m=\sum_{j=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}b_{jxx}+\Lambda^2b_j-\Lambda^2ub_j-\Lambda vb_j\right)\Lambda^{m-j+1}=\sum_{j=0}^{m}\langle\Lambda^{j+1}q_2,p_1\rangle\Lambda^{m-j+1};$$

$$\omega_{22}^m=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2}b_{jx}\Lambda^{m-j+1}=\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\langle\Lambda^{j+1}q_2,p_2\rangle-\frac{1}{2}\langle\Lambda^{j+1}q_1,p_1\rangle\right)\Lambda^{m-j+1}。$$

定理 5　在 Bargmann 约束条件(19)下,发展方程族 Lax 对(9)等价于如下 Hamiltom 正则方程[4,7]

$$\begin{cases}Q_x=\frac{\partial h}{\partial P},\quad P_x=-\frac{\partial h}{\partial Q}\\ Q_{t_m}=\frac{\partial h_m}{\partial P},\quad P_{t_m}=-\frac{\partial h_m}{\partial Q}\end{cases}\quad m=0,1,2,\cdots \tag{24}$$

其中 Hamiltom 函数为(21)式,h_m 为

$$h_m=-\sum_{j=0}^{m}\begin{vmatrix}\langle\Lambda^{m-j+1}q_1,p_1\rangle\langle\Lambda^{j+1}q_1,p_2\rangle\\ \langle\Lambda^{m-j+1}q_2,p_1\rangle\langle\Lambda^{j+1}q_2,p_2\rangle\end{vmatrix}+\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{4}(\langle\Lambda^{j+1}q_1,p_1\rangle+\langle\Lambda^{j+1}q_2,p_2\rangle)(\langle\Lambda^{m-j+1}q_1,p_1\rangle+\langle\Lambda^{m-j+1}q_2,p_2\rangle) \tag{25}$$

令[6]

$$E_k^{(1)}=\sum_{l=1,l\neq k}^{N}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_l}(q_{1k}q_{2l}-q_{2k}q_{1l})(p_{1k}p_{2l}-p_{2k}p_{1l}), E_k^{(2)}=\sum_{l=1,l\neq k}^{N}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_l}B_{ij} \tag{26}$$

其中,$B_{ij}=\sum_{i=1}^{2}q_{il}p_{il}\sum_{j=1}^{2}q_{jk}p_{jk}$。

命题 6

$$\text{(i)}\quad \{E_j^m, E_k^n\} = 0, \forall j,k = 1,2,\cdots,N;\quad m,n = 1,2 \tag{27}$$

(ii) $\{dE_j^m, j=1,2,\cdots,N; m=1,2\}$ 线性独立;

(iii) $\Upsilon_\mu = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\mu - \lambda_j}(E_j^1 + E_j^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{-m-1} h_m,\quad h_m = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^m (E_j^1 + E_j^2)\quad m=0,1,2,\cdots$。

定理 7 Hamiltom 系统(24)在 Liouville 意义下是完全可积系,并且 Hamiltom 相流 $g_{h_m}^{t_m}, g_{h_n}^{t_n}$ 可换。

证明:由(27)式直接计算得 $\{\Upsilon_\mu, \Upsilon_\lambda\} = 0$,$\{h_m, h_n\} = 0, m,n = 0,1,2,\cdots$。

直接计算可知 $\{h, E_j^l\} = 0, l = 1,2; j = 0,1,2,\cdots,N$,

所以 $\{h, h_m\} = 0,\quad m = 0,1,2,\cdots$

由 Arnold 定理[5],Hamiltom 系统(24)是完全可积系,且 Hamiltom 相流可换。

定理 8 设 (q_1, q_2, p_1, p_2) 满足 Hamiltom 系统(24),则式(19)

$$u = 1 - \langle \Lambda q_1, p_2 \rangle^{-2} \langle \Lambda^2 q_1, p_2 \rangle \langle \Lambda q_1, p_2 \rangle^{-3}$$

为非线性发展方程族(8)的对合解[2,4]。

4 结论

本文主要研究了 H-D 型非线性发展方程族的 Lax 对,根据谱问题的位势函数与特征函数之间的约束关系,可得到 Liouvile 意义下的完全可积系统,进而利用完全可积的 Hamilton 系统的对合解表示发展方程的解。

参 考 文 献

[1]曹策问. AKNS 方程族的 Lax 方程组的非线性化[J]. 中国科学 A,1989(7):701-707.

[2] 耿献国,曹策问. 一个 Bargmann 系统与一类演化方程解的对合表示[J]. 数学年刊,1992, 13A(s):92-98.

[3] Cao Cewen,Wu Yongtang, Geng Xianguo. Relation between the Kadometsev-Petviashvili equation and the confocal involutive system[J]. J. Math. Phys,1999,40(8):3948-3969.

[4] Gu Zhuquan. The Neumann system for the third-order eigenvalue problems related to the Boussinesq equation[J]. IL Nuovo Cimento, 2002,117(6):615-631.

[5]Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics[M]. Berlin:Springer, 1978.

[6] 谷超豪,曹策问,李翊神. 孤立子理论与应用[M]. 杭州:浙江科学技术出版社,1990.

[7] Zhao Ye,Gu Zhuquan,Liu Yafeng. The Neumann system for the 4th-order eigenvalue problem and constraint flows of the coupied KdV-type equations [J]. Eur. Phys. J. Plus,2012,127:77.

The Second-order Spectral Problem of Energy Depended on Potential and Hierarchy of Evolution Equations

Zhang Ruijun[1], **Liu Yafeng**[2]

(1. School of Science,Hebei University of Technology,Tianjin 300401,China;

2. Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract:In this paper, the nonlinear evolution equation and the Hamilton system related to a second-order spectral problem are studied. Using the nonlinearization approach of Lax pairs, the Jacobi-Ostrogradsky coordinates of classical mechanics is discussed. Finally the completely integrable Hamilton system can be obtained in the Bargmann constraint condition, and the involutive solutions of the evolution equations are given.

Key words:spectral problem;ninlinearization of Lax pairs;Bargmann system;integrable system