

基于耦合 Duffing 振子和 Van der pol 振子系统的微弱信号检测研究

王晓东^{1,2}, 赵志宏²

(1. 石家庄铁道大学 机械工程学院, 河北 石家庄 050043;

2. 河北省交通安全与控制重点实验室, 河北 石家庄 050043)

摘要:传统的微弱信号检测在检测信噪比较低的信号时效果不理想, 基于此提出了一种基于 Duffing 振子和 Van der pol 振子的耦合非线性系统, 建立了非线性耦合模型, 详述了耦合系数对耦合非线性系统的影响。采用 Simulink 数值仿真的方法, 分析了 Duffing 振子和 Van der pol 振子耦合非线性系统的动力学行为, 阐述了基于相平面变化进行微弱信号检测的工作原理。并且具体分析了耦合系统在色噪声背景下的微弱信号检测效果, 取得了很好的效果。

关键词:混沌; 非线性耦合系统; 微弱信号检测; 信噪比

中图分类号:TH165+.3 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-0373(2016)04-0060-06

0 引言

微弱信号检测技术^[1-2]在通信、生物医学、电力系统故障诊断等领域有着广泛的应用, 一直是国内外学者研究的热点。它是采用一系列信号处理方法, 从噪声中检测出有用的微弱信号, 从而满足现代科学研究和技术应用需要的一种检测技术。如今微弱信号检测技术的需求日益迫切, 其对推动相关领域的发展具有重要的意义^[3-4]。

传统的微弱信号检测方法是基于线性的、确定性的系统, 已经远远不能满足现在人们对微弱信号检测的需要。近年来, 混沌^[5-6]振子系统检测微弱信号的应用越来越多, 其检测理论得到了不断改进和发展。混沌系统具有对初值的敏感性和对噪声的免疫力两大特性^[7], 利用这两大特性可以较为灵敏的将微弱信号从噪声中检测出来。目前微弱信号检测方法大多是采用单 Duffing 振子^[8]或双耦合 Duffing 振子^[9]系统, 但是对于不同混沌振子之间耦合^[10-11]系统的应用不多。一些国外学者, 对于 Duffing 振子和 Van der pol 振子耦合系统也仅是在动力学分析方面做深入的研究, 应用在微弱信号检测方面的也是鲜为人见。

1 建立非线性耦合系统模型

经典的 Duffing 振子和 Van der pol 振子虽然在表达形式上很简单, 但是由于丰富的动力学行为而极具代表性。下面通过线性耦合的方法将两个振子进行耦合, 组成的非线性耦合系统如下

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - x_1 + x_1^3 + k(x_1 - x_2) = f \cos(\omega t + \theta) \\ \ddot{x}_2 + \mu(1 + x_2^2)\dot{x}_2 + x_2^2 + k(x_2 - x_1) = f \cos(\omega t + \theta) \end{cases} \quad (1)$$

式中, c 表示 Duffing 振子的阻尼系数; μ 表示 Van der pol 振子的阻尼系数; k 表示线性耦合系数, k 的取值越大说明耦合的强度越高, 相互作用越强, 当 $k=0$ 时, 两个系统的耦合作用完全消失。通过仿真研究发现此耦合非线性系统具有复杂的动力学行为。 $f \cos(\omega t + \theta)$ 表示策动力, ω 表示驱动力的频率, θ 表示

收稿日期: 2015-12-21 责任编辑: 刘宪福 DOI: 10.13319/j.cnki.sjztdxxxbzrb.2016.04.10

基金项目: 国家自然科学基金(11172182, 11227201, 11472179)

作者简介: 王晓东(1989-), 男, 硕士研究生, 主要从事非线性理论与故障诊断研究。E-mail: wx_dong@126.com

王晓东, 赵志宏. 基于耦合 Duffing 振子和 Van der pol 振子系统的微弱信号检测研究[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2016, 29(4): 60-65.

初相位,通常选取 $\theta=0$,当其它参数都固定时,非线性耦合系统会随着幅值 f 变化而有规律的变化。

1.1 非线性耦合系统的动力学行为

由式(1)的数学模型,可建立 Duffing 振子和 Van der pol 振子的非线性耦合系统的 Simulink 仿真模型,然后取 $f \cos(\omega t)$ 为周期策动力及系统内置频率 $\omega=1.0 \text{ rad/s}$,其它参数为 $k=0.2, c=0.5, \mu=1.0$,采用 4 阶 Runge-Kutta 法仿真计算,随着周期策动力幅值由 0 值逐渐递增的过程中,非线性耦合系统的状态出现有规律的变化:经历同宿轨道、倍周期分岔轨迹、混沌和周期状态,如图 1 所示。

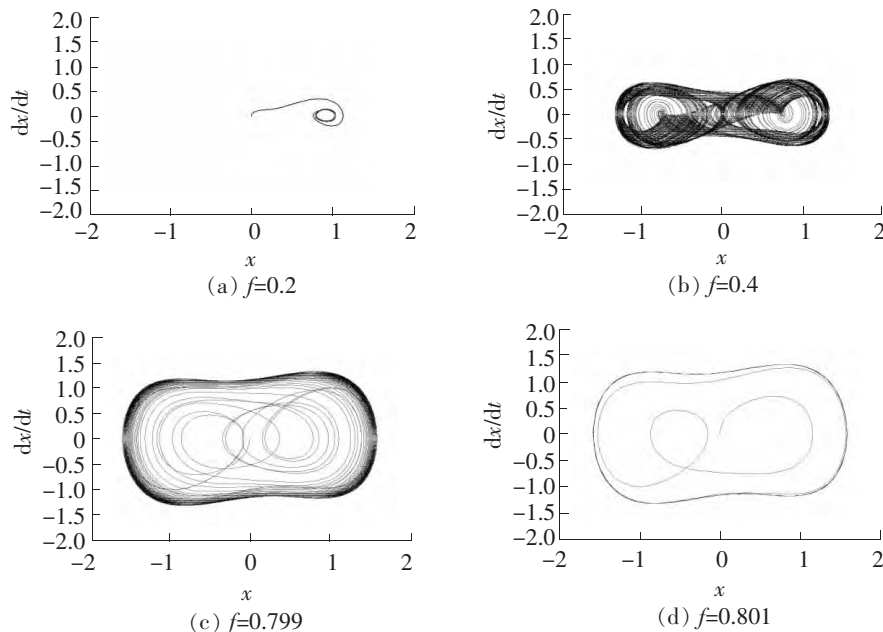


图 1 非线性耦合系统在不同策动力幅值下的响应

1.2 耦合系数对非线性耦合系统的影响

耦合系数 k 是整个非线性系统中很重要的一个参数,其取值直接影响着系统的动力学行为演化过程。下面通过绘制分岔图来观察系统在不同耦合系数 k 参数下的动力学行为演变过程,能够清楚地表达出动力学系统在跨越临界值(分岔值)所导致稳定定常状态定性变化的现象。本节主要是探索混沌系统对微弱周期信号检测的潜能,寻找非线性耦合系统是否出现由混沌状态直接变为周期状态,由分岔图可以清楚观察到这一现象,然后再通过其它的方法找到精确的(跃迁值)临界阈值。如图 2 的分岔图是系统在不同的耦合系数 $k(k=0.2, 0.5, 0.8, 1.0)$,位移随策动力幅值 f 的变化过程。

通过图 2 可以观察到:在其它参数固定不变的情况下,耦合系数 k 对系统产生了很大的影响。分析在固定的系数 k 下,随着 f 的变化,系统经历着单周期状态、倍周期分岔进入双周期状态,继续分岔进入 4 周期状态,随着 f 的不断增大,进入混沌状态,最后又都进入单周期状态。但是仔细观察发现,当 $k=0.2$ 时,大概 f 在 $0.7 \sim 0.8$ 的变化过程中,系统的状态由混沌状态直接变成周期一的大尺度周期状态。对于其它分岔图,并未出现此现象,因此本节实验所要选取的一个参数 $k=0.2$,通过以上几个图的对比分析,对于不同混沌振子之间,较小的耦合系数更易出现混沌与大周期。所以对于非线性系统,每一个参数的选取都是至关重要的。

2 微弱信号检测仿真实验

2.1 检测原理

本文采用的微弱信号检测原理和以往混沌系统检测原理是一样的,都是采用混沌系统基于相平面变化的检测原理,其中由混沌状态变为周期状态表现最为明显。原理简述为:首先设置激励信号的幅值略小于跃迁阈值 f_d 此时系统处于混沌状态,其次将待检测的微弱周期信号与噪声一起作为激励信号项加入到混沌系统当中,加入叠加的信号当中含有一个与激励信号同频率的信号,并且此信号的幅值与激励

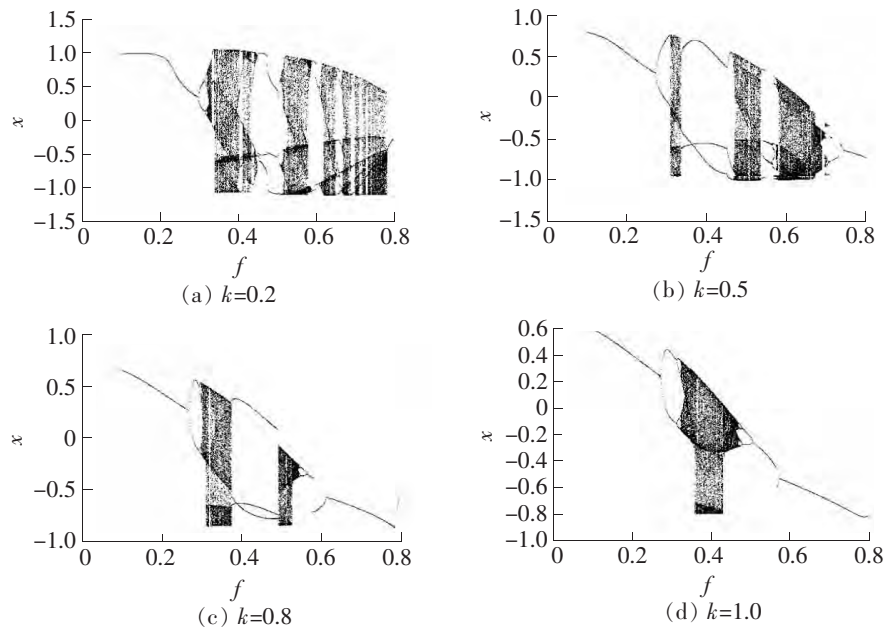


图 2 不同耦合系数下非线性耦合系统的分岔图

信号的幅值相加能大于跃迁阈值 f_d , 此时混沌系统的输出相图将会由混沌状态变为周期状态。因此通过观察混沌系统前后相图的变化, 就可以判断是否有微弱周期信号的存在。

2.2 微弱信号检测模型

根据以上耦合非线性系统的性质分析将其应用于微弱信号检测, 下面进行数值仿真实验。根据建立的耦合非线性系统数学模型(1), 选取各个参数 $k=0.2, c=0.5, \mu=1.0$, 并且由实验分析得到的临界阈值 $f_d=0.779$, 系统可以检测的最低门限为 0.002。频率 ω 为 1.0 rad/s 的周期信号和 $\sigma(t)$ 采用均值为 0, 方差 σ^2 为 0.1 的高斯白噪声信号一起作为输入信号加入进行数值仿真实验。微弱信号检测的数学模型如下

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - x_1 + x_1^3 + k(x_1 - x_2) = f \cos(\omega t + \theta) + [a \cos(\omega t + \varphi) + \sigma(t)] \\ \ddot{x}_2 + \mu(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + x_2^2 + k(x_2 - x_1) = f \cos(\omega t + \theta) + [a \cos(\omega t + \varphi) + \sigma(t)] \end{cases} \quad (2)$$

式中, $f \cos(\omega t + \theta)$ 为内置信号; $a \cos(\omega t + \varphi)$ 为待测信号; $\sigma(t)$ 为高斯白噪声。对上述构造的检测系统进行仿真实验时, 选择从临界周期到周期的轨迹相变为判断系统输入是否带有周期信号的依据, 亦即 f 将设置在临界分岔状态附近。当待测信号加入系统中经过暂态过程以后, 系统稳定在某一运动形式上, 计算机通过辨识系统容易得知系统是处于混沌还是大尺度周期运动状态。由此, 可判断输入的信号是纯噪声还是混有微弱周期信号。

当输入待测信号后, 整个驱动力变为

$$A(t) = f \cos(\omega t + \theta) + a \cos(\omega t + \varphi) = f[\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)] + a[\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)] \quad (3)$$

当相位 $\theta=0$ 时

$$A(t) = [f + a \cos(\varphi)]\cos(\omega t) - a \sin(\varphi)\sin(\omega t) = \gamma(\tau)\cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

式中,

$$\gamma(\tau) = \sqrt{f^2 + a^2 + 2fa \cos(\varphi)}, \quad \varphi(\tau) = \arctan \frac{a \sin(\varphi)}{a \cos(\varphi) + f} \quad (5)$$

可以看出系统相态和相位之间的关系。调整策动力可以使待测信号的相位满足式: $\pi - \arccos[(a/2f)] \leq \varphi \leq \pi + \arccos[(a/2f)]$, 范围如图 3 所示, 使系统处于混沌状态, 不产生到大周期的变化, 此研究现在只适合于模拟信号仿真实验, 可以通过调节待测信号的相位在检测的范围内, 对于工程实际故障信号的检测, 由于采集信号的好多因素都是未知的, 因此还有待于进一步深入研究。

通过将待测周期信号输入到检测系统当中,观察系统输出相图的变化情况:当系统没有同频率待测的周期的信号输入或只有纯噪声输入时,系统输出相图如图 4(a)所示。当系统有相同频率的待测周期信号 $a \cos(\omega t)$,其中 $a=0.003$ 输入系统时,系统输出相图如图 4(b)所示。因此,我们可以通过系统相图的变化,判断微弱周期信号的存在。

由上述耦合非线性系统的相态变化的仿真结果显示,可求得此时的信噪比检测的门限为

$$SNR=10 \lg \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma^2}=10 \lg \frac{\frac{1}{2} \times 0.003^2}{0.1} \approx -43.468 \text{ dB}.$$

对于传统方法,很难检测到信噪比在 -10 dB 以下的信号,这也是一些传统方法的局限性所在,即很难在强噪声背景下实现微弱信号的检测,同时也验证了混沌检测系统的优势,即能够实现低信噪比下的微弱信号检测。因此混沌系统具有很好的研究价值和发展前景。

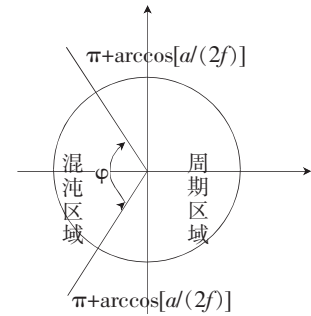


图 3 混沌区域的对称性

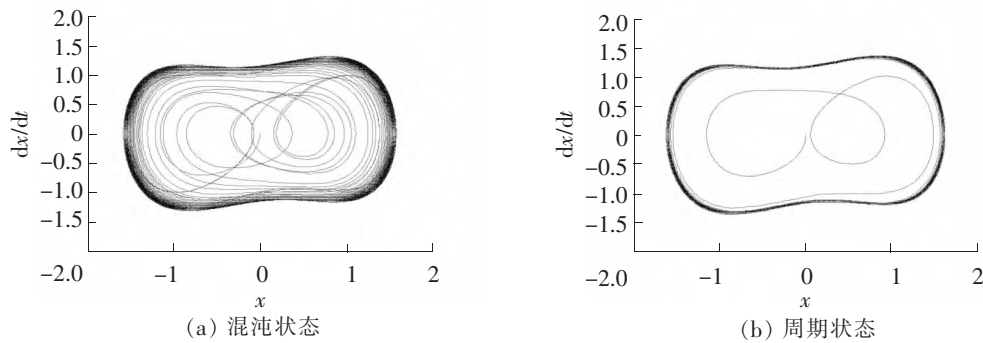


图 4 Duffing 振子和 Van der pol 振子耦合系统相图

3 色噪声下微弱正弦信号检测

我们把除白噪声之外的所有噪声都称之为有色噪声,有色噪声是指任意一个具有非白色频谱的宽带噪声。噪声是一个随机过程,而随机过程有功率谱密度函数,其功率谱密度函数的形状决定了噪声的颜色。大多数的音频噪声(电视、收音机),发动机的噪声等都是色噪声,非高斯信号相对于白噪声,是更普遍的信号。

将白噪声通过带宽 $\pm B$ 的理想低通滤波器,再通过滤波器传递函数 H ,就可以得到色噪声了,具体的数学推导原理分析如下

$$\frac{G_0(\omega)}{G_1(\omega)} = |H(\omega)|^2 \quad (6)$$

式中, $G_i(\omega)$ 为输入信号的功率谱密度; $G_0(\omega)$ 为输出信号的功率谱密度,又因为 $H(\omega)=1$,所以 $G_0(\omega)=G_i(\omega)$ 。输出信号即色噪声的平均功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_0}{2} d\omega = \int_{-B}^{+B} df = n_0 B W \quad (7)$$

系统的输出信号为色噪声,由维纳—辛钦定理知道,信号的功率谱密度函数和它的自相关函数互为傅里叶变换时,即色噪声的自相关函数为

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{n_0}{2} \int_{-B}^{+B} e^{j2\pi f\tau} df = R_n(\tau) = n_0 B \frac{\sin(x)}{x} \quad (8)$$

令 $x=2\pi B\tau$, 即有

$$R_n(\tau) = n_0 B \frac{\sin(x)}{x} \quad (9)$$

由上面的推导过程可以看出,自相关函数 $R_n(\tau)$ 是 $\frac{\sin(x)}{x}$ 函数,因此,与白噪声不同的是它除了 $\tau=0$ 的任意两个不同时刻上的随机取值都是相关的。不相关的白噪声通过滤波器后产生了相关的色噪声,由图 5 的两组对比图可以进行说明。

本实验中所采用的 Gauss 色噪声是由方差为 1 的 Gauss 白噪声通过一个 4 阶带通滤波器产生的,该滤波器的传递函数为

$$H(Z) = \frac{0.0201(1 - 2Z^{-1} + Z^{-4})}{1 - 1.637Z^{-1} + 2.237Z^{-2} - 1.3072Z^{-3} + 0.641Z^{-4}} \quad (10)$$

该低通滤波器的上限截止频率为 0.21,下限截止频率为 0.23(均为归一化频率)。图 5 通过 4 幅图展示了 Gauss 白噪声通过上述 4 阶带通滤波器后产生的 Gauss 色噪声的时域波形图和功率谱密度图,通过对比滤波前后的噪声变化,发现 Gauss 白噪声与 Gauss 色噪声时域波形的不同,并通过 FFT(傅里叶)变换后的功率谱图之间也会存在很大的差异。

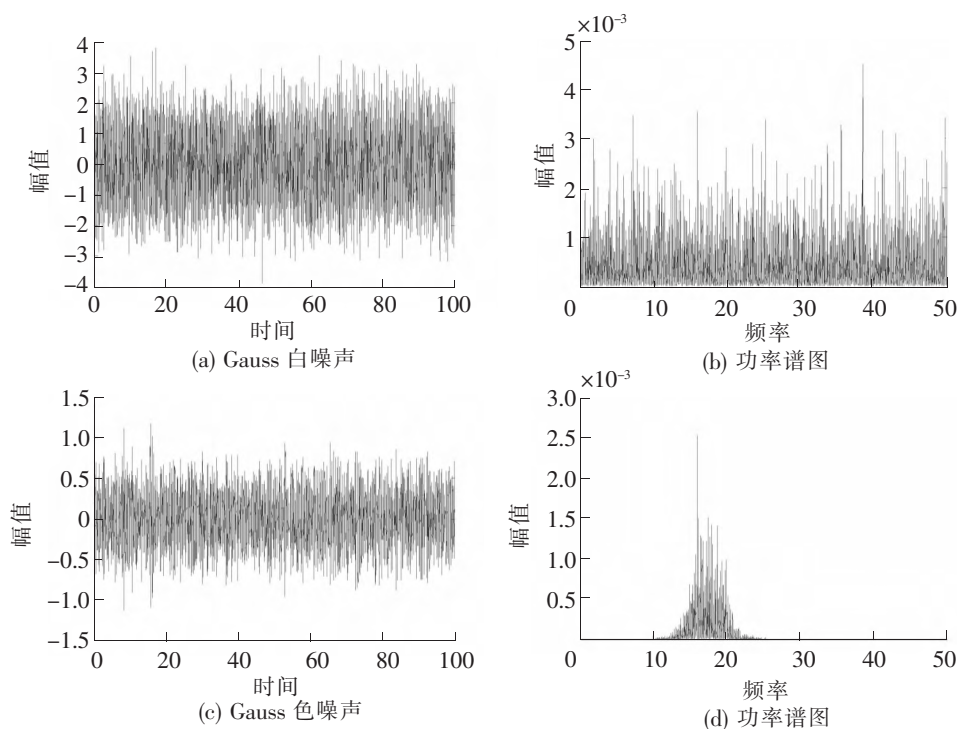


图 5 对比通过滤波器前后的噪声

在 Gauss 色噪声背景下,按照上面相同的步骤方法,利用相图识别理论进行仿真实验,测得这时的微弱信号检测信噪比门限为

$$SNR = 10 \lg \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma^2} \approx -36.478 \text{ dB}.$$

由仿真结果可见,该耦合非线性振子系统在 Gauss 色噪声背景下,信噪比可以达到,具有很好的检测效果。

4 结论

本文提出了一种新的微弱信号检测系统模型,两种不同混沌振子即 Duffing 振子和 Van der pol 振子非线性耦合系统的检测方法,分析了耦合系统的动力学行为特性,阐述了检测原理。与传统方法相比,可以更好检测出微弱周期信号,达到更低的信噪比。详细分析了在色噪声背景下,此耦合非线性系统也能获得很好的检测效果。对于不同混沌振子之间的耦合非线性系统更加深入的研究有待于进一步完善。

参 考 文 献

- [1] 李月, 杨宝俊. 混沌振子检测引论[M]. 北京: 工业出版社, 2004.
- [2] 聂春燕. 混沌理论及基于特定混沌系统的微弱信号检测方法研究[D]. 吉林: 吉林大学, 2006.
- [3] Zhang Hongyu, Wang Yihe. A novel weak signal detection method with unknown frequency uncertainty[J]. Advanced Science and Technology Letters, 2015, 81(11): 51-55.
- [4] 李健, 何坤, 乔强. 应用混沌系统实现弱信号的检测[J]. 四川大学学报, 2004, 41(06): 1180-1183.
- [5] 王冠宇, 陈大军, 林建亚, 等. Duffing 振子微弱信号检测方法的统计特性研究[J]. 电子学报: 自然科学版, 1998, 26(10): 38-44.
- [6] 顾晓辉, 刘永强, 杨绍普, 等. 基于混沌吸引子特征量的滚动轴承故障诊断[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2015, 28(1): 91-95.
- [7] Zheng S Y, Guo H X, Li Y An, et al. A new method for detecting line spectrum of ship-radiated noise using Duffing oscillator[J]. Chinese Science Bulletin, 2007, 52(14): 1906-1912.
- [8] 李月, 杨宝俊, 石要武. 色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测[J]. 物理学报, 2003, 52(3): 526-530.
- [9] 李月, 路鹏, 杨宝俊, 等. 用一类特定的双耦合 Duffing 振子系统检测强噪声背景中的周期信号[J]. 物理学报, 2006, 55(4): 1672-1677.
- [10] Kengne J, Chedjou J C, Kenne G, et al. Analog circuit implementation and synchronization of a system consisting of a van der Pol oscillator linearly coupled to a Duffing oscillator[J]. Nonlinear Dyn, 2012, 70: 2163-2173.
- [11] Han Yong-jin, Dynamics of Coupled Nonlinear Oscillators of Different Attractors Van der Pol Oscillator and Damped Duffing Oscillator[J]. Journal of the Korean Physical Society, 2000, 37(1): 3-9.

Weak Signal Detection Based on the System of a Van Der Pol Oscillator Coupled to a Duffing Oscillator

Wang Xiaodong^{1,2}, Zhao Zhihong²

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

2. Key Laboratory of Traffic Safety and Control in Hebei, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: The effect of the traditional weak signal detection in low SNR is not perfect, accordingly we put forward a kind of the nonlinear system based on Duffing oscillator and Van der pol oscillator and establish the nonlinear coupling model, and expounded the influence of coupling coefficient for the coupling nonlinear system in detail. With the simulation method of Simulink, we analyzed the Duffing oscillator and Van der pol oscillator coupling nonlinear system dynamics behaviors, and expounded the working principle of weak signal detection for the changes based on the phase plane. Finally we carried out specific analysis of coupling system under the background of colored noise of weak signal detection, achieving good results.

Key words: chaos; nonlinear coupling system; weak signal detection; signal to noise ratio(SNR)