

带拒绝费用的平行机在线排序

荣建华¹ 侯丽英²

(1. 石家庄铁道大学 四方学院 基础部, 河北 石家庄 051132,

2. 南京农业大学 理学院, 江苏 南京 210095)

摘要:研究了工件带有拒绝费用的 m 台平行机在线算法, 假定有 m 台平行机 $M_1, M_2, \dots, M_m$, n 个工件 $J_1, J_2, \dots, J_n$, 每个工件的加工时间与拒绝费用成固定的比例 $\alpha (\alpha \geq 0)$, 即 $p_j = \alpha t_j$, 当 α 较大时, 即工件的拒绝费用相对于加工时间较大, 则将此工件接收加工; 当 α 较小时, 即每个工件的拒绝费用相对于其加工时间较小, 此时将工件拒绝。文中设计出在线算法 PRLS, 并证明算法的竞争比为关于参数 α 的分段函数, 且为紧界。

关键词:在线排序; 竞争比; 同型机; 拒绝费用; 不可中断; 运筹学

中图分类号:O223 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-0373(2016)02-0107-04

0 引言

在经典的排序文献中, 所有的工件都不允许被拒绝, 换言之, 任何工件都必须被安排到机器上进行加工。然而在工厂实际生产过程中, 生产决策者们并非总是如此。随着社会经济的迅速发展, 市场竞争也越来越激烈, 为了使企业在市场竞争中立于不败之地, 良好的调度管理和有效的控制成本成为企业间竞争的重要因素。因此在现有的生产资源有限的前提下, 为了使企业获得最多的利润, 生产厂家有时不得不拒绝一些资源耗费较多但带来的利润却较少的工件。基于在实际生产中上述问题比较常见, 所以工件带拒绝费用的排序问题受到研究人员广泛的关注^[1-4]。本文主要研究了工件带拒绝费用的 m 台平行机在线排序问题。基本模型描述如下: 设有 m 台机器 $M_1, M_2, \dots, M_m$ 和 n 个工件 $J_1, J_2, \dots, J_n$, 每台机器的加工速度相同, 每个工件 J_j 带两个参数 (p_j, t_j) , p_j 表示其拒绝费用, t_j 表示其加工时间。当工件 J_j 到达后, 生产决策者需马上做出决定, 工件可以被拒绝, 但要付出一定的拒绝费用; 也可以选择被加工, 花费一定的加工时间。目标为拒绝工件的总拒绝费用与加工工件的最晚完工时间 (makespan) 之和最小。文中进一步假设每个工件的拒绝费用和加工时间成固定比例 $\alpha (\alpha \geq 0)$, 且加工不允许中断 (non-preemptive), 即工件一旦分给某个机器, 必须由这台机器连续加工直到结束。以上问题用三参数法表示为 $Pm | non-pmpt, rej, p_j = \alpha t_j | W$ 。

根据确定排序时了解的工件信息的多少, 常将平行机排序分为“在线” (on-line), “离线” (off-line) 和“半在线” (semi on-line)。在线排序为工件一个一个到达, 只有在工件到达后才知道它的信息, 且工件一经安排不得临时改变; 离线排序为所有工件信息都事先完全已知, 排序者可充分利用工件信息设计算法; 而实际应用中的情况往往介于上述两种情形之间, 我们称之为“半在线” (semion-line), 即所知道的工件信息介于在线和离线之间, 工件的准确信息虽然未知, 但一些局部信息事先已知, 如: 工件按从小到大的顺序到达, 各工件的加工时间介于某个区间 $[t, rt]$ 中, 工件的总长度 (sum), 最大工件 (max) 等等。半在线排序中, 已知的工件部分信息或条件可以帮助我们设计出比在线情形更优的算法。

收稿日期: 2015-04-06 责任编辑: 车轩玉 DOI: 10.13319/j.cnki.sjztdxxxbzrb.2016.02.21

基金项目: 国家自然科学基金 (11426133), 南京农业大学青年科技创新基金 (0506J0116)

作者简介: 荣建华 (1981-), 女, 硕士, 讲师, 主要从事运筹学与组合最优化研究。E-mail: rongjianhua2006@126.com

荣建华, 侯丽英. 带拒绝费用的平行机在线排序[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2016, 29(2): 107-110.

对于排序问题,人们致力于研究它的近似算法,通常用竞争比 ρ_A 来衡量算法 A 的优劣。设 $C^A(I)$ 为用算法 A 安排实例 I 所得的目标值, $C^{OPT}(I)$ 为离线排序下的最优值,则定义 $\rho_A = \inf\{l | C^A(I) \leq l C^{OPT}(I), \forall I\}$ 一个排序问题具有下界 ρ_L 是指不存在一个算法 A , 其竞争比严格小于 ρ_L 。如果某算法 A 的竞争比与其相应的下界相等,即 $\rho_A = \rho_L$, 则称该算法为最佳近似算法。

对于带拒绝费用的离线的平行机排序问题(简记成 MSR),最开始由 Bartal^[5] 等人提出,并确定了一个完全多项式近似方案。对于带拒绝费用的在线的平行机排序问题,且加工不允许中断, Bartal^[5] 等人对任意的机器数 m 设计出一个最佳算法 $RTP(T)$, 其竞争比为 2.618。对于加工不可中断(nonpreemptive)的带拒绝费用的平行机在线排序问题, 闵啸^[6] 等人针对机器数为 2 时,设计出在线算法 NPRL, 证明算法的竞争比 ρ_{NPRL} 和下界均为关于参数 α 的分段函数。且当 $\alpha \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [1+, \infty)$ 时算法已达到最优。当机器数为 3 时, 闵啸^[7] 等人设计出在线算法 PRL, 证明算法的竞争比 ρ_{PRL} 和下界均为关于参数 T 的分段函数, 且当 $T \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{5}{6}, \infty)$ 时算法最优。

本文是基于闵啸^[6-7] 的基础上,将机器台数推广到任意台 $m(m > 3)$, 即讨论 m 台带拒绝费用的同型机在线排序问题,每个工件的拒绝费用 p_j 和加工时间 t_j 之间成固定比例 α , 即 $p_j = \alpha t_j (\alpha \geq 0)$, 且加工不允许中断(non-preemptive), 问题记为 $Pm | nonpmppt, rej, p_j = \alpha t_j | W$, 设计出在线算法 PRLS, 证明算法的竞争比 ρ_{PRLS} 为关于参数 α 和机器台数 m 的分段函数。

1 $Pm | nonpmppt, rej, p_j = \alpha t_j | W$ 的算法设计

$Pm | nonpmppt, rej, p_j = \alpha t_j | W$ 问题的描述已在引言中介绍,其中, α 为工件的加工时间和拒绝费用的比例($\alpha \geq 0$),下面对符号作统一规定。

J : 工件集; J_j 第 j 个工件; A : 在线算法 PRLS 中被加工的工件集; R : 在线算法 PRLS 中被拒绝的工件集; $\bar{A}$ 最优算法中被加工的工件集; $\bar{R}$ 最优算法中被拒绝的工件集; y : 在线算法 PRLS 中最后一个被加工的工件,由它决定了被加工工件集的最晚完工时间(*makespan*); $L(S), S \subseteq J$: S 中工件的加工总长度; $P(S), S \subseteq J$: S 中工件的总拒绝费用; $C(T), T \subseteq J$: T 为被加工工件集时的最晚完工时间(*makespan*); $C^{OPT}(T), T \subseteq J$, 将 T 中所有工件接收加工产生的最优(*makespan*); $W^{PRLS} = C(A) + P(R)$: 在线算法的目标值; $W^{OPT} = C(\bar{A}) + P(\bar{R})$ 最优目标值; ρ_{PRLS} : 在线算法 PRLS 的竞争比。

算法的基本思想: 若 α 较大, 即工件的拒绝费用相对于加工时间较大, 则倾向于将其接收, 若 α 较小, 即每个工件的拒绝费用相对于其加工时间较小, 故将其拒绝较好; 因为同型机在线排序中, 对于加工不可中断情形, 且 m 台机器时, $LS(list scheduling)$ 算法已为最优算法, 故可按 LS 算法安排工件加工。

算法 PRLS:

(1) 若 $\alpha \in [0, \frac{1}{\sqrt{m}})$, 所有工件均被拒绝;

(2) 若 $\alpha \in [\frac{1}{\sqrt{m}}, +\infty)$, 所有工件均被接收并按 LS 算法分配加工, 即将工件分配给当前负荷最小的

机器加工。

引理 1.1 在 m 台同型机在线排序中, 假设 S 为被加工的工件集, 且按 LS 算法安排加工, y 为最后完工的工件, 最晚完工时间为 $C(S)$, 则有:

(1) $C(S) \leq \frac{1}{m} L(S \setminus \{y\}) + t_y$;

(2) $L(S) \leq m C(S)$ 。

定理 1.1 PRLS 算法的竞争比至多为:

$$\rho_{PRLS} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \alpha < \frac{1}{m} \\ m\alpha, & \frac{1}{m} \leq \alpha < \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\alpha}, & \frac{1}{\sqrt{m}} \leq \alpha < \frac{m}{2m-1} \\ \frac{2m-1}{m}, & \frac{m}{2m-1} \leq \alpha < +\infty \end{cases}$$

且界是紧的。

证明:根据 α 的不同取值范围,下面分情况进行讨论。

情形 1:若 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, 根据算法拒绝所有工件, 则有:

$$W^{PRLS} = P(J) = P(\bar{A} \cup \bar{R}) = P(\bar{A}) + P(\bar{R}) = \alpha L(\bar{A}) + P(\bar{R} \leq \alpha m C(\bar{A}) + P(\bar{R}) \leq \max\{m\alpha, 1\} [C(\bar{A}) + P(\bar{R})] = \max\{m\alpha, 1\} W^{OPT}.$$

(1) 若 $m\alpha < 1$, 即 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{m}\right)$, 有 $W^{PRLS} \leq W^{OPT}$, 此时算法已为最优;

(2) 若 $m\alpha \geq 1$, 即 $\alpha \in \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, 有 $W^{PRLS} \leq m\alpha W^{OPT}$ 。

情形 2: 若 $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{m}}, +\infty\right)$ 根据算法将所有工件接收并按 LS 算法分配加工, 令 x 为最后一个完工工件, 有

$$\begin{aligned} W^{PRLS} = C(J) &\leq \frac{1}{m} L(J \setminus \{x\}) + t_x = \frac{1}{m} L(\bar{A} \cup \bar{R} \setminus \{x\}) + t_x = \frac{1}{m} L(\bar{A} \setminus \{x\}) + \\ &\frac{1}{m} L(\bar{R} \setminus \{x\}) + t_x = \frac{1}{m} L(\bar{A} \setminus \{x\}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R} \setminus \{x\}) + t_x \end{aligned} \quad (1)$$

以下根据 x 在最优解中是被接收还是被拒绝再分两种子情形:

子情形 2.1: 若 x 在最优解中被拒绝, 即 $x \in \bar{R}$, 则由式(1):

$$\begin{aligned} W^{PRLS} &\leq \frac{1}{m} L(\bar{A} \setminus \{x\}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R} \setminus \{x\}) + \frac{p_x}{\alpha} = \frac{1}{m} L(\bar{A}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R} \setminus \{x\}) + \frac{p_x}{\alpha} \leq \\ &\frac{1}{m} m C(\bar{A}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R} \setminus \{x\}) + \frac{p_x}{\alpha} \leq C(\bar{A}) + \frac{1}{\alpha} [P(\bar{R} \setminus \{x\}) + p_x] = C(\bar{A}) + \frac{1}{\alpha} P(\bar{R}) \leq \\ &\max\left\{1, \frac{1}{\alpha}\right\} [C(\bar{A}) + P(\bar{R})] = \max\left\{1, \frac{1}{\alpha}\right\} W^{OPT}. \end{aligned}$$

子情形 2.2: 若 x 在最优解中被接收, 则有: $x \in A$,

$$\begin{aligned} W^{PRLS} &\leq \frac{1}{m} L(\bar{A} \setminus \{x\}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R}) + t_x = \frac{1}{m} L(\bar{A} \setminus \{x\}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R}) + \frac{1}{m} t_x + \frac{m-1}{m} t_x = \\ &\frac{1}{m} L(\bar{A}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R}) + \frac{m-1}{m} t_x \leq C(\bar{A}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R}) + \frac{1}{m\alpha} P(\bar{R}) + \frac{m-1}{m} t_x \leq C(\bar{A}) + P(\bar{R}) + \frac{m-1}{m} t_x \leq \\ &W^{OPT} + \frac{m-1}{m} W^{OPT} = \frac{2m-1}{m} W^{OPT}. \end{aligned}$$

于是得到: $W^{PRLS} \leq \max\left\{1, \frac{1}{\alpha}, \frac{2m-1}{m}\right\} W^{OPT}$, 当 $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{m}{2m-1}\right)$ 时, 有 $\frac{2m-1}{m} < \frac{1}{\alpha}$, 则有 $W^{PRLS} \leq \frac{1}{\alpha} W^{OPT}$; 当 $\alpha \in \left[\frac{m}{2m-1}, +\infty\right)$ 时, 有 $\frac{1}{\alpha} \leq \frac{2m-1}{m}$, 则有 $W^{PRLS} \leq \frac{2m-1}{m} W^{OPT}$ 。

由此, 得到了关于算法 PRLS 的上界 ρ_{PRLS} 。

下面构造实例说明这个界是紧的。

当 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{m}\right)$ 时, 算法已为最优。若 $\alpha \in \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, 取 m 个工件 $J_i = (1, \alpha)$, $j = 1, 2, \dots, m$, PRLS 算

法将所有工件全部拒绝,此时由算法所得的目标值 $W^{PRLS} = ma$ 。而在最优算法中将以上工件全部接收并分给不同的机器进行加工,得 $W^{OPT} = 1$,因此 $W^{PRLS}/W^{OPT} = ma$ 。若 $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{m}{2m-1}\right)$,取工件 $J_1 = (1, \alpha)$,由 $PRLS$ 算法将工件 J_1 接收,而在最优解中应将其拒绝,于是 $W^{PRLS}/W^{OPT} = \frac{1}{\alpha}$ 。若 $\alpha \in \left[\frac{m}{2m-1}, +\infty\right)$,取个工件 $J_j = (1, \alpha), j = 1, 2, 3, \dots, m(m-1), J_{m(m-1)+1} = (m, ma)$,由 $PRLS$ 算法将以上工件全部接收并按 LS 算法分配加工,得到 $W^{PRLS} = (m-1) + m = 2m-1$ 。而最优解 $W^{OPT} = m$ 。最后得到 $W^{PRLS}/W^{OPT} = \frac{2m-1}{m}$ 。定理证毕。

2 结语

本文将带拒绝费用的平行机排序问题推广到 m 台机器上,且不允许中断加工,设计出在线算法 $PRLS$,并证明了算法的竞争比为关于参数 α 的分段函数。但是有关该问题的下界还没有给出,下一步将致力于构造该问题的下界。

参 考 文 献

- [1] SEIDEN S S. Preemptive multiprocessor scheduling with rejection[J]. Theoretical Computer Science, 2001, 262: 437-458.
- [2] WEN J J, DU D L. Preemptive on-line scheduling for uniform processors[J]. Operations Research Letters, 1998, 23: 113-116.
- [3] Epstein L, Sgall J. Approximation schemes for scheduling on uniformly related and identical parallel machines[J]. Algorithmica, 2004, 39: 43-57.
- [4] Dosa G, He Y. Preemption and non-preemption on-line algorithms for scheduling with rejection on two uniform machines[J]. Computing, 2006, 76: 149-162.
- [5] Bartal Y, Leonardi S, Marchetti-Spaccamela A, et al. Multiprocessor scheduling with rejection[J]. SIAM J on Discrete Mathematics, 2000, 13: 64-78.
- [6] 闵啸. 一种特殊情形不可中断的两台可拒绝同型机在线排序问题[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(4): 1-6.
- [7] 闵啸. 一特殊情形的三台可拒绝同型机在线排序问题[J]. 嘉兴学院学报, 2006, 18(3): 44-47.

On-line Scheduling on Identical Machines with Rejection

Rong Jianhua¹, Hou Liying²

(1. Department of basic, Shi jiazhuang Tiedao University Sifang College, Shijiazhuang 051132, China;

2. College of Sciences, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

Abstract: This paper investigates the on-line scheduling problem on m identical machines with rejection. An identical processors system denoted by and a sequence of independent jobs are given. We assume that the processing time of each job and its penalty forms the regular proportion denoted by. The objective is to minimize the sum of the makespan produced by the accepted jobs and the total penalty of the jobs which have been rejected. Preemption is not allowed. For this version, we present an on-line algorithm and prove the competitive ratio.

Key words: on-line scheduling; competitive ratio; identical machine; rejection; nonpreemptive; operations research