### 石家庄铁道大学学报(自然科学版)

Vol. 28 No. 4

2015 年 12 月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Dec. 2015

# Duffing 振子和 Van der Pol 振子耦合的 动力学行为分析

王晓东<sup>1,2</sup>, 杨绍普<sup>1,2</sup>, 赵志宏<sup>2</sup>

(1. 石家庄铁道大学 机械工程学院,河北 石家庄 050043;2. 河北省交通安全与控制重点实验室,河北 石家庄 050043)

摘要:针对耦合非线性混沌振子复杂的动力学行为,本文将 Duffing 振子和 Van der Pol 振子进行耦合,建立了 Duffing 振子和 Van der Pol 振子的耦合模型。与单个振子相比,耦合 Duffing 振子和 Van der Pol 振子表现出了更加丰富的动力学特性,采用 Simulink 仿真的方法,通过 不同策动力幅值、不同耦合系数、不同频率下耦合非线性振子的相图和庞加莱截面图分析了耦 合非线性振子的动力学行为,研究了耦合振子对微弱周期信号的敏感性和对噪声的免疫力,并 将此模型应用于微弱信号检测的研究中。

关键词:混沌;耦合振子;微弱信号检测;仿真

中图分类号:TH165+.3 文献标志码: A 文章编号: 2095 - 0373 (2015) 04 - 0053 - 06

0 引言

第 28 卷 第 4 期

近年来,对混沌的研究从低维时间系统转向高维时空系统。将若干不同的非线性振子(如 Van der Pol 振子、Duffing 振子等)相互耦合,构成的耦合非线性振子系统,是研究时空混沌的较为理想的模 型<sup>[1-2]</sup>。由于耦合系统兼有两个振子的共同特性,会表现出更加复杂的动力学行为,所以耦合振子的动力 学行为在理论和应用中具有重要意义,因而日益受到重视。经典的 Duffing 及 Van der Pol 振子虽然在 表达形式上很简单,但是由于具有丰富的动力学特性而极具代表性,它们常常被用来模拟系统的非线性 特性,比如用耦合非线性振子系统描述和处理生物学、化学、光学、凝聚态物理学等众多领域的物理过程。 各国学者对耦合振子系统的研究大致包括两方面工作,即系统的动力学行为和系统的控制与同步<sup>[3]</sup>。长 期的实验发现,耦合振子和单个振子相比具有更加复杂的动力学行为。

本文研究了 Duffing 振子和 Van der Pol 振子相互耦合的动力学行为,对于这方面的文献相对还比较 少,文献[4]依照它们各自的非线性特点耦合到一起,发现了一些特性,依然具有 Duffing 振子的特性,即 对于微小扰动的极其敏感性和对噪声的免疫力<sup>[5-8]</sup>。鉴于此特性,对此系统做了实验分析和动力学分析, 而且上述两大特性可以较为灵敏的将微弱信号从噪声中提取出来,在抑制噪声的同时,信号未被削弱,能 有效降低噪声干扰,进行高灵敏度测量<sup>[9-11]</sup>。在混沌学中,一个非线性系统,其参数的变化有时会引起系 统发生本质变化。这种变化反映到系统相图中是由混沌态变为周期态。本文通过数值仿真的方法,研究 了此耦合非线性系统的这种本质的变化,并将其应用于微弱信号检测中,取得了一定的效果。

### 1 模型的建立

Duffing 振子和 Van der Pol 振子组成非线性的耦合系统如下

$$\begin{cases} x_1 + cx_1 - x_1 + x_1^3 + k(x_1 - x_2) = f \cos(\omega t) \\ x_2 + \mu(1 - x_2^2)x_2 + x_2 + k(x_2 - x_1) = f \cos(\omega t) \end{cases}$$
(1)

作者简介:王晓东(1989一)男,硕士研究生,研究方向为车辆的动力学控制与行为研究。E-mail:1099982864@qq.com

基金项目:国家自然科学基金项目(11172182、11227201、11472179)

**收稿日期:**2014-09-03 责任编辑:刘宪福 DOI:10.13319/j.cnki.sjztddxxbzrb.2015.04.10

王晓东,杨绍普,赵志宏. Duffing 振子和 Van der Pol 振子耦合的动力学行为分析[J]. 石家庄铁道大学学报:自然科学版,2015,28(4):53-57,80.

式中,c表示 Duffing 振子的阻尼系数;k表示耦合系数;k的取值越大说明耦合的强度越高,不同振子间的 同步性越强,当k=0时,两个系统的耦合作用完全消失; $\omega$ 表示角频率; $f \cos(\omega t)$ 表示周期的驱动力; $\mu$ 表示 Van der Pol 振子的阻尼系数;f为周期策动力的幅值,当其他参数固定的时候,系统随着  $f \cos(\omega t)$ 的幅值变化而有规律的变化。

由数学模型,可建立 Duffing 振子和 Van der Pol 振子耦合系统的仿真模型,如图 1 所示。为了说明 耦合系统的工作原理取  $f \cos(\omega t)$ 为周期策动力,及系统频率  $\omega = 1.0 \text{ rad/s}, k = 0.8, c = 0.5, \mu = 0.8, 随着$ 周期策动力振幅 <math>f 由 0 值逐渐增大,系统状态出现有规律的变化:经历同宿轨迹,分岔轨迹,混沌轨迹和 大尺度周期状态。



图 1 Duffing 振子和 Van der Pol 振子耦合系统的仿真模型

Duffing 和 Van der Pol 耦合振子表现出丰富的非线性动力学特性,当策动力幅值 f 比较小时,它表现为围绕某一焦点做周期的运动(系统相图如图 2(a)所示),随着策动力幅值 f 的逐渐增大,当超过某一阈值时,系统处于混沌状态(系统相图如图 2(b)所示),相轨迹局限在某一个范围之内,继续增大激励信号的幅值 f,当再次超过某个阈值之后,系统进入到周期状态(系统相图如图 2(c)所示),相轨迹不再杂乱无章,而是沿着固定的轨道重复下去。



图 2 不同激励幅值的系统相图

#### 2 数值仿真实验

该实验用 Matlab 中的 simulink 模块进行仿真,对于耦合振子系统的状态方程

$$\begin{cases} x_{1} = y_{1} \\ \dot{y}_{1} = -cy_{1} + x_{1} - x_{1}^{3} - k(x_{1} - x_{2}) + f \cos(\omega t) \\ \dot{x}_{2} = y_{2} \\ \dot{y}_{2} = -\mu(1 - x_{2}^{2})y_{2} - x_{2} - k(x_{2} - x_{1}) + f \cos(\omega t) \end{cases}$$
(2)

经过大量实验分析,耦合非线性系统动力学行为如图 3 所示,发现该系统对微弱的信号很敏感,选择

其他的参数固定不变,当策动力幅值  $f_1 = 0.342$  时,系统相图表现为混沌状态,系统的庞加莱截面图为混 乱的点集如图 3(c)所示,当策动力幅值  $f_2 = 0.343$  时,系统相图表现为周期状态,系统的庞加莱截面图为 只有 3 个点(周期 3 的运动)如图 3(f)所示,由仿真实验看出此系统对于微小的扰动是很敏感的。

![](_page_2_Figure_3.jpeg)

图 3 不同激励幅值下 Duffing 振子和 Van der Pol 振子耦合系统的动力学行为 ((a)、(d)图为系统的相图;(b)、(e)图为系统的时域图;(c)、(f)图为系统的庞加莱截面图)

## 3 各个参数对耦合系统的影响

#### 3.1 耦合系数对耦合系统的影响

对于上述 Duffing 振子和 Van der pol 振子耦合系统方程式(1),其中 k 代表耦合系数,其余各参数取 值分别为  $\mu=0.8, c=0.5, f=0.343, \omega=1.0 \text{ rad/s}, \exists k=0 \text{ bh},系统的耦合作用消失,随着 <math>k$  的逐渐增大 耦合作用越来越强,但是对于系统的状态变化有了一定的影响,下面分别取 k=0.1, 0.5, 1.0, 1.5 bh, 1.5 cb它参数不变,对比下面一组系统的相图(如图 4 不同耦合系数取值下系统的动力学行为),可以发现耦合 系数在一定的范围内对于系统的影响不是很大,但是超过某个范围时,系统将会发生质的变化(系统状态 发生改变,从周期状态变为混沌的状态),所以在选取耦合系数时对实验仿真也至关重要。

#### 3.2 频率ω对耦合系统的影响

ω代表周期策动力的频率,随着周期策动力的逐渐变化,系统的状态也在发生着变化,选择其它参数 不变,即  $\mu$ =0.8,c=0.8,f=0.343,k=0.5,选取 ω=0.1,1.0,5.0,10.0 时,分别观察系统的相图(如图 5),仿真实验发现随着频率 ω 的改变,系统的状态发生了很大的变化。

综上所述,各个参数对于系统的影响还是比较大的,不合理参数的选取会对系统的状态发生本质的 变化,所以在工程应用中,对于这个系统模型的应用,有待于进一步的探索,针对工程的需求,要合理地选 择参数进行匹配,方可达到较好的效果。

#### 4 Duffing 和 Van der Pol 耦合振子在微弱信号检测中的应用分析

本节根据以上耦合振子的性质分析将其应用于微弱信号的检测,下面进行数值仿真实验,根据上面 建立的耦合系统模型,选取  $k=0.8,c=0.5,\mu=0.8$ ,并且由以上实验分析得到的临界阈值  $f_1=0.342,$ 频 率为 1.0 rad/s 作为周期信号和幅值为 0.01 的高斯白噪声信号一起加入进行数值仿真。数学模型如下

![](_page_3_Figure_2.jpeg)

图 5 不同频率取值下系统的相图

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + cx_1 - x_1 + x_1^3 + k(x_1 - x_2) = f \cos(\omega t) + a \cos(\omega t) + \sigma(t) \\ \ddot{x}_2 + \mu(1 - x_2^2)x_2 + x_2 + k(x_2 - x_1) = f \cos(\omega t) + a \cos(\omega t) + \sigma(t) \end{cases}$$
(3)

式中, $f\cos(\omega t)$ 为内置信号; $a\cos(\omega t)$ 为待测的信号; $\sigma(t)$ 为高斯白噪声。对上述构造的系统进行仿真 实验时,选择从临界周期到周期的轨迹相变为判断系统输入是否带有谐波信号的依据,亦即  $f_1, f_2$  将设 置在临界分岔状态附近。当待测信号加入系统中经过暂态过程以后,系统稳定在某一运动形式上,计算 机通过辨识系统容易得知系统是处于混沌还是大尺度周期运动状态。由此,可判断输入是纯噪声还是混 有微弱周期信号。

当系统没有待测的周期的信号输入时,系统输出的呈现如图 6(a)的混沌现象。当系统有相同的待测 周期信号  $a \cos(\omega t)$ ,其中 a=0.001,输入系统时,系统输出的呈现如图 6(b)的周期现象。

![](_page_4_Figure_4.jpeg)

图 6 噪声幅值为 0.01 时系统的相图

#### 5 结论

本文研究了 Duffing 振子和 Van der Pol 振子的耦合特性,耦合系统的各个参数对系统动力学行为的 影响,揭示了丰富的动力学特性。本研究发现在系统仿真求解的过程中,一个非线性微分方程的解与系 统参数有很大的关系,通过仿真发现,此系统具有混沌现象和周期现象。我们也借此特性应用到微弱信 号检测方面,表现出了比以往传统的微弱信号检测方法具有更好的稳定性和准确性。但由于 Duffing 振 子和 Van der Pol 振子耦合系统具有更多的复杂性,仍是今后探索的地方。

## 参考文献

- [1]Han Y J. Dynamics of coupled nonlinear oscillators of different attractors; van der Pol oscillator and damped Duffing oscillator[J]. Journal of the Korean Physical Society, 2000,37(1):3-9.
- [2]李群宏,陆启韶. 耦合 Van der Pol-Duffing 振子的动力学分析[J]. 河南师范大学学报,2002,30(4):4-15.
- [3]包刚,那仁满都拉,图布心,等.耦合混沌振子系统完全同步的动力学行为[J].物理学报,2007,56(4):1971-04
- [4]J Kengne, J C Chedjou, G Kenne, et al. Analog circuit implementation and synchronization of a system consisting of a van der Pol oscillator linearly coupled to a Duffing oscillator J]. Nonlinear Dyn, 2012, 70:2163-2173
- [5]催春夏,吴锋民.控制周期激 VanderPol-Duffing 振子的混沌[J].浙江工业大学学报,2004,32(3):6-18.

[6]李月,杨宝俊,石要武.色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测[J].物理学报,2003,48(1):19-21.

- [7]Li Yue,Lu Peng,Yang Baojun, et al. Applying a special kind of two coupled Duffing oscillator system to detect periodic signals under the background of strong colored noise[J]. Phys. 2006; 55(4): 1672-1677
- [8] 聂春燕. 混沌系统与弱信号检测[M]. 北京:清华大学出版社,2009.
- [9]代理,李健,郑豫,等. 基于双耦合 Duffing 振子的随机相位正弦信号检测[J]. 成都信息工程学院学报,2008,23(1): 50-53.
- [10]李亚峻,李月,卢金,等. 微弱信号混沌检测系统混沌阈值的确定[J]. 吉林大学学报,2004,22(2):106-110.
- [11] 汪金山,汪晓东,施晓钟,等. 基于 Duffing 混沌系统微弱信号检测的数值分析[J]. 仪器仪表学报,2005,26(8):33-34.

(下转第80页)

#### 第 28 卷

## 参考文献

[1]于庆广.可编程控制器原理及系统分析[M].北京:清华大学出版社,2004:61-62.
[2]曹勇,王洪应.机电式四点自动调平系统设计[J].零八一科技,2004(2):42-44.
[3]张二江,李永刚.新型四自由度并联机构位置逆解分析[J].天津职业技术师范大学学报,2011(4):7-11.

# The Research and Development of the Electro-hydraulic Leveling Control System for Mixers Based on PLC

#### **Cao Xuefeng<sup>1</sup>**, **Gao Bin<sup>2</sup>**, **Gao Lan<sup>1</sup>**

School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;
 Tranvic Group, Neijiang 642463, China)

Abstract: To ensure the measurement precision of the ingredients and the quality of stir, the concrete mixing equipment must be in a level state before using. A automatic leveling control system with four support vehicle-mounted container type cement mixing plant is depicted in this paper. With mitsubishi FX2N series PLC as the control core, a touch screen as a wired remote control, hydraulic components as support and motivation, this control system has solved these problems of the traditional cement mixing plant such as long leveling, low precision and big workload. In this paper, according to the overall design scheme, the hardware circuit and software program and a prototype are designed. Proved by experiments and field use, this system has fast leveling speed, high precision, stable performance and has better solved the four-point supporting virtual leg problems, which has a broad application prospect in the market.

Key words: vehicle-mounted mixing equipment; PLC; automatic leveling; electric hydraulic control

(上接第57页)

# Analysis of Dynamical Behavior of a Van Der Pol Oscillator Coupled to a Duffing Oscillator

Wang Xiaodong<sup>1,2</sup>, Yang Shaopu<sup>1,2</sup>, Zhao Zhihong<sup>2</sup>

School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;
 Key Laboratory of Traffic Safety and Control in Hebei, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract**: For complex dynamic behaviors of coupling nonlinear chaotic oscillators, this paper makes a Van der Pol oscillator couple to a duffing oscillator and establishes a duffing oscillator and Van der Pol oscillator coupling model, which, compared with the single oscillator, shows rich dynamics. With Simulink simulation method, by coupling the phase diagrams and Poincaré maps of nonlinear chaotic oscillators under different amplitudes of the driving motivation, different coupling coefficients and different frequencies, this paper analyzes the dynamics of coupling nonlinear oscillators, and studies the coupling oscillator sensitivity to the weak periodic signals and the immunity of noise and has applied this model in weak signal detection.

Key words: chaos; coupling oscillators; weak signal detection; simulation