第 28 卷 第 1 期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 28 No. 1
2015 年 3 月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Mar. 2015

非对称型 SD 振子的动力学行为研究

陈聚峰[1], 张 静[2]

(1. 石家庄铁道大学 数理系,河北 石家庄 050043; 2. 石家庄邮电职业技术学院 基础部,河北 石家庄 050021)

摘要: 基于 SD 振子,建立了非对称型 SD 振子模型及其运动方程。利用等价替换法与代入法求解 8 次方程,分析平衡点,研究该系统的分岔现象。运用平均法求其幅频方程,并利用 Matlab 等软件对该模型进行数值模拟,得到幅频响应曲线、系统的分岔图、相图和 Poincare 截面。结果显示,该系统具有与 SD 振子不相同的丰富非线性动力学特性,拓展了 SD 振子的研究和应用范围。

关键词: 非对称型 SD 振子; 分岔; 幅频曲线; 混沌

中图分类号: O322 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-0373(2015)01-0101-05

0 引言

2006 年,文献[1-3]提出 SD(smooth and discontinuous)振子模型并研究了其复杂的动力学行为,发现了怪手形吸引子(SD 吸引子)。2008 年,文献[4-5]对非光滑不连续系统的周期解和混沌情况的数值解进行了研究,利用分段线性逼近的方法对于 SD 振子的混沌边界值进行了近似计算。2010 年,文献[6-8]研究了 SD 振子的余维二分岔,以及 Hopf 分岔,找到系统的普适开折。2012 年,文献[9]利用隐函数解析方法和 Melnikov 方法对 SD 振子这类带有非线性无理项的系统的混沌阈值解析进行了研究。文献[10]对常数激励下的 SD 振子系统的平衡点及混沌吸引子结构进行了分析讨论。另外,SD 振子实验研究取得了一系列的新进展[11],为实验研究复杂动力学行为创造了条件。

2011 年,文献[12-13]在 SD 振子的基础上,建立了一类全新的柱面摆。它具有摆类的性质和 SD 振子的特性。2012 年,文献[14]在 SD 振子的基础上,建立了耦合 SD 振子。

本文在 SD 振子的基础上,建立了非对称型 SD 振子的动力学模型,得到其运动方程。首先,考察非对称型 SD 振子的静态分岔。其次,利用平均法分析了系统周期解的稳定性。借助于变换,将 8 次代数方程降为 4 次代数方程[15]。考察新的 4 次代数方程解的结构并结合物理意义,得到了未扰动系统的平衡点分布情况。最后,利用数值模拟分析了系统的分岔与混沌等动力学行为。

1 非对称型 SD 振子的模型及运动方程

非对称型 SD 振子的力学模型如图 1 所示,系统由一个质量为 m 与一对分别刚性固定的弹簧连接而成,弹簧的刚度系数为 k,但是与 SD 振子不同的是,振子没有位于跨中,而是在中轴线的某一侧,弹簧在静平衡状态下的长度分别为 L_1 和 L_2,且满足 $L_2 = \mu L_1$,中轴线距两侧刚性支撑的距离分别为 l_1 和 l_2。

由牛顿第二定律,并令 $x = X/L_1$,$\alpha_1 = l_1/L_1$,$\alpha_2 = l_2/L_2$,$\omega_0^2 = k/m$,可得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha_1^2}}\right) + \omega_0^2 x\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + \alpha_2^2}}\right) = 0 \qquad (1)$$

收稿日期: 2014-06-18 责任编辑: 刘宪福 DOI: 10.13319/j.cnki.sjztddxxbzrb.2015.01.21

作者简介: 陈聚峰(1977-),男,讲师,研究方向为非线性分析。E-mail: chenjufeng@stdu.edu.cn

通讯作者: 张静(1979-),女,讲师,研究方向为非线性动力学分析。E-mail: zhangjing@cptc.cn

基金项目: 国家自然科学基金项目(11372196); 河北省自然科学基金项目(A2014210104)

陈聚峰,张静. 非对称型 SD 振子的动力学行为研究[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版,2014,28(1): 101-105.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

不妨令 $\omega_0 = 1$，则系统(1)变为

$$\ddot{x} + x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha_1^2}}\right) + x\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + \alpha_2^2}}\right) = 0 \tag{2}$$

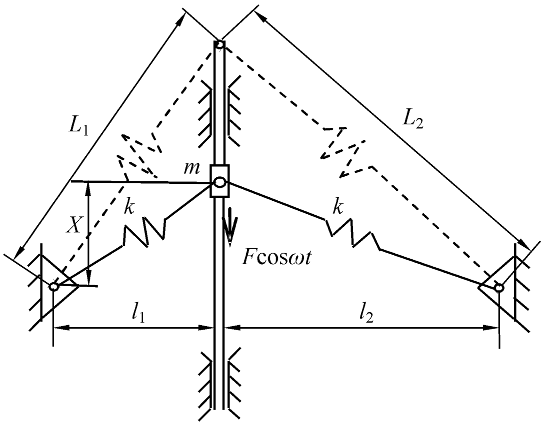

图1 非对称型SD振子的力学模型示意图

2 平衡点分岔分析

为了得到系统(2)的平衡点，求解方程

$$x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha_1^2}}\right) + x\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + \alpha_2^2}}\right) = 0 \tag{3}$$

在 $x \neq 0$ 的情况下，(3)可化简为

$$2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha_1^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + \alpha_2^2}} \tag{4}$$

令 $z = x^2$，且两边同时平方可得

$$z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0 \tag{5}$$

式中，

$$b = \frac{32(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 8(1 + \mu^2)}{16};$$

$$c = \frac{16(\alpha_1^4 + 4\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4) + \mu^4 + 1 - 8\mu^2(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 8(\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2) - 2\mu^2}{16};$$

$$d = \frac{32(\alpha_1^4\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^4) + 2\mu^4\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - 8\mu^2(\alpha_1^4 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2) - 8(2\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4) - 2\mu^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{16};$$

$$e = \frac{16\alpha_1^4\alpha_2^4 + \mu^4\alpha_1^4 + \alpha_2^4 - 8\mu^2\alpha_1^2\alpha_2^2 - 8\alpha_1^2\alpha_2^4 - 2\mu^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{16}。$$

方程(5)的解为

$$z_{1,2} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4C_1}}{2}, z_{3,4} = \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4C_2}}{2}。$$

其中，

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4c + 4y_0}\right), C_1 = \frac{1}{2}\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - 4e}\right), B_2 = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4c + 4y_0}\right),$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4e}\right), y_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \frac{c}{3}, \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

$$p = bd - 4e - \frac{c^2}{3}, q = 4ce - b^2e - d^2 + \frac{c}{3}(bd - 4e) - \frac{2c^3}{27}。$$

将 $z_i(i = 1,2,3,4)$ 代入式(4)，得

$$\frac{1}{\sqrt{z_j + \alpha_1^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{z_j + \alpha_2^2}} \neq 2, (j = 1,2,4) \tag{6}$$

所以 z_3 是方程(3)的解。易知，$x = 0$ 亦为方程(3)的解。

综上所述，系统(2)的平衡点为

$$(0,0), (\sqrt{z_3},0), (-\sqrt{z_3},0)。$$

当 α_1, α_2, μ 满足 $\alpha_2 + \alpha_1\mu - 2\alpha_1\alpha_2 > 0$，方程(3)有3个解，系统(2)有3个平衡点；当 α_1, α_2, μ 满足 $\alpha_2 + \alpha_1\mu - 2\alpha_1\alpha_2 \leqslant 0$，方程(3)有1个解，系统(2)有1个平衡点。特别地，当 $\alpha_2 = \lambda\alpha, \alpha_1 = \alpha$ 时，若 λ, μ, α 满足 $\lambda + \mu - 2\lambda\alpha > 0$，方程(3)有3个解，系统(2)有3个平衡点；若 λ, μ, α 满足 $\lambda + \mu - 2\lambda\alpha \leqslant 0$，方程(3)有1个解，系统(2)有1个平衡点。此时，系统的平衡点分岔图，如图2所示。故非对称型SD振子比SD振子[10]的平衡点分岔更复杂。

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3　响应方程

考虑系统(2)受到阻尼和外激励作用，则系统(2)满足

$$\ddot{x}+\xi\dot{x}+x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha_1^2}}\right)+x\left(1-\frac{\mu}{\sqrt{x^2+\alpha_2^2}}\right)=F\cos\omega t \tag{7}$$

令

$$\begin{cases}x=a\cos(\omega t+\theta)\\ \dot{x}=-a\omega\sin(\omega t+\theta)\end{cases} \tag{8}$$

由平均法可得响应方程为

$$F^2=a^2\xi^2+\frac{(a(\omega^2-2)\pi+\Phi_1+\mu\Phi_2)^2}{\pi^2} \tag{9}$$

式中，

$$\Phi_1(a,\alpha_1)=\frac{4\sqrt{a^2+\alpha_1^2}}{a}E\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\alpha_1^2}}\right)-\frac{4}{a\sqrt{a^2+\alpha_1^2}}K\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\alpha_1^2}}\right);$$

$$\Phi_2(a,\alpha_2)=\frac{4\sqrt{a^2+\alpha_2^2}}{a}E\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\alpha_2^2}}\right)-\frac{4}{a\sqrt{a^2+\alpha_2^2}}K\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\alpha_2^2}}\right);$$

$K(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\theta}}$ 和 $E(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-m^2\sin^2\theta}d\theta$ 分别为第一类完全椭圆积分和第二类完全椭圆积分。

取参数 $\lambda=2$，$\mu=3$，$\xi=0.05$，$\alpha_1=0.5$，$\alpha_2=\lambda\alpha_1$ 和 $\omega=1.3$，幅频响应曲线如图 3 所示。虚线部分表示周期解的不稳定的区域，实线部分表示周期解的稳定区域。

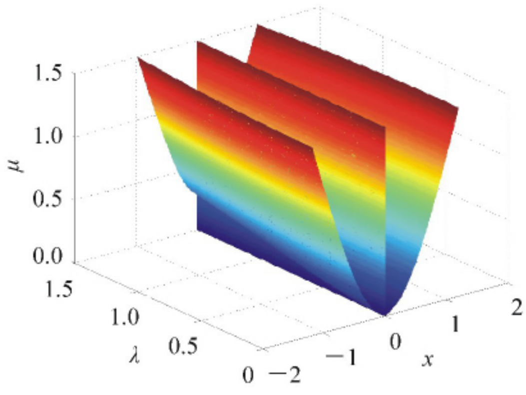

图 2　平衡点分岔图($\alpha=0.6$)

4　数值模拟

选取系统参数 $\lambda=1.75$，$\mu=1.5$，$\alpha=0.35$，$\xi=0.035$，$\alpha_2=\lambda\alpha_1$，$\alpha_1=\alpha$，对系统(7)进行数值模拟，分岔图如图 4 所示。由图 4 可以看出，系统存在着复杂的动力学行为: 由周期运动发展为混沌运动; 随外激励增加，系统呈现由周期运动到混沌运动的交替变换。

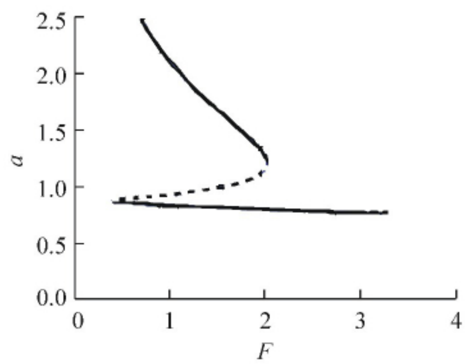

图 3　非对称型 SD 振子的幅频响应曲线图

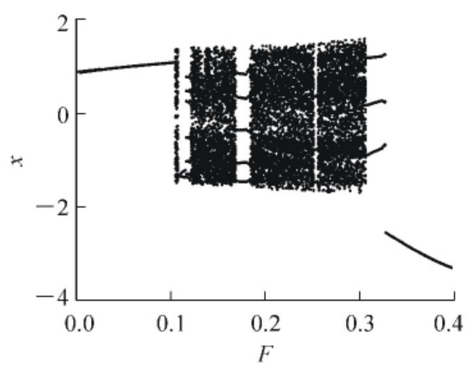

图 4　系统的分岔图

为了更好的理解系统(7)的复杂动力学行为，图 5 描绘了在不同外激励幅值 F 下的相图和 Poincaré 截面图。图 5(a)为外激励 $F=0.06$ 时，系统处于周期 1 运动状态; 当 $F=0.12$ 时，如图 5(b)所示，系统为周期 7 运动; 当 $F=0.168$ 时，系统处于混沌运动状态(图 5(c))，它的 Poincaré 截面呈现怪手状; 图 5

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(d) 中,当 $F=0.170$ 时,系统处于周期 5 运动状态; 在图 5(e) 中,当 $F=0.20$ 时,系统处于混沌运动状态; 图 5(f) 和图 5(g) 显示,当 $F=0.318\ 85$ 和 $F=0.35$ 时,系统分别周期 3 和周期 1 的运动状态。显然,非对称型 SD 振子吸引子的结构不同于 SD 振子[4] 的吸引子的结构。

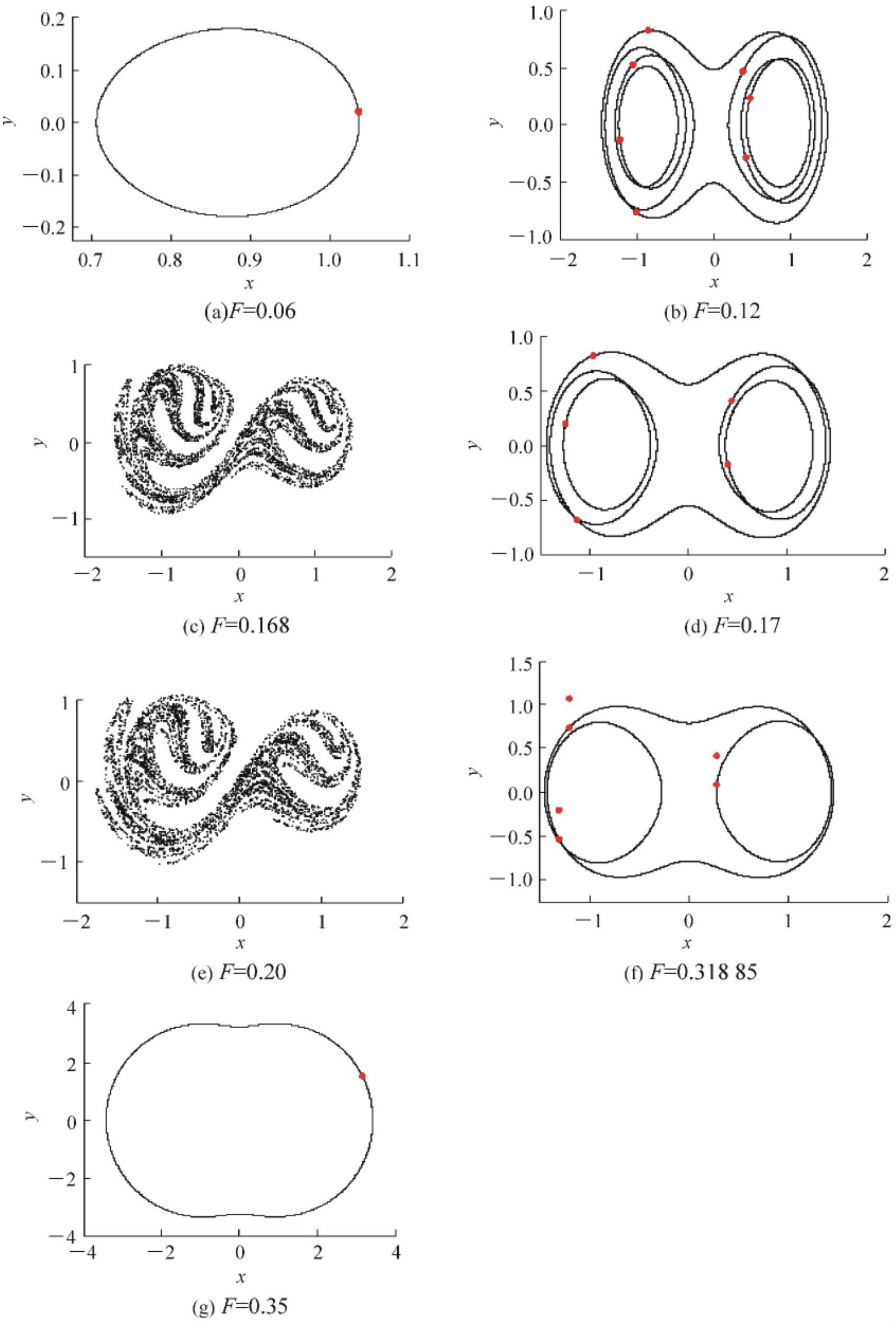

图 5 系统在不同外激励幅值 F 下的相图和 Poincaré 截面图

5 结论

讨论了非对称型 SD 振子的复杂动力学行为。借助于变换,将 8 次代数方程降为 4 次代数方程。考察 4 次方程根的情况及物理意义,得到了未扰动系统的平衡点分布情况。其平衡点的个数依赖 α_2 +

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\alpha_1\mu-2\alpha_1\alpha_2$ 取值,故该系统的静态分岔比对称型 SD 振子的静态分岔复杂。利用平均法得到系统的响应曲线,并分析了系统周期解的稳定性。最后通过数值模拟分析了系统的分岔与混沌等动力学行为,研究结果表明该系统与对称 SD 振子在动力学行为方面有明显区别,拓展了 SD 振子的应用范围。

参 考 文 献

[1] Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaia E, et al. Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics [J]. Physical Review E., 2006, 74(4): 046218(1-5).

[2] 曹庆杰, Wiercigroch M, Pavlovskaia E, 等. SD 振子、SD 吸引子及其应用[J]. 振动工程学报, 2007, 20(5): 454-458.

[3] 曹庆杰, Wiercigroch M, Pavlovskaia E, 等. SD 振子、SD 吸引子的转迁过程及其特性[J]. 科技导报, 2007, 25(23): 33-37.

[4] Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaia E, Piecewise linear approach to an archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2008, 366(1865): 635-652.

[5] Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaia E, et al. The limit case response of the archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics [J]. International Journal of nonlinear Mechanics, 2008, 43(6): 462-473.

[6] Tian R L, Cao Q J, Li Z X. Hopf Bifurcations for the Recently Proposed Smooth-and-Discontinuous oscillator [J]. Chinese Physics Letters, 2010, 27(7): 0747011-0747014.

[7] Tian R L, Cao Q J, Yang S P. The codimension-two bifurcation for the recent proposed SD oscillator [J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 59(1-2): 19-27.

[8] 曹庆杰,田瑞兰,韩彦伟. SD 振子的非线性动力学特征研究[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2010, 23(2): 32-37.

[9] Tian R L, Yang X W, Cao Q J, et al. Bifurcations and chaotic threshold for a nonlinear system with an irrational restoring force [J]. Chinese Physics B, 2012, 21(2): 020503(1-12).

[10] Tian R L, Wu Q L, Liu Z J, et al. Dynamic analysis of the smooth-and-discontinuous oscillator under constant excitation [J]. Chinese Physics Letters, 2012, 29(8): 084706(1-4).

[11] 陈恩利,曹庆杰,冯明,等. SD 振子的设计及非线性特性实验研究初探[J]. 力学学报, 2012, 44(3): 584-590.

[12] Cao Q J, Han N, Tian R L, et al. A rotating pendulum linked by an oblique spring [J]. Chinese Physics Letters, 2011, 28(6): 060502(1-4).

[13] Han N, Cao Q J, Wiercigroch M, Estimation of the chaotic thresholds for the recently proposed rotating pendulum [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2013, 23: 1350074(1-22).

[14] Han Y W, Cao Q J, Chen Y S, et al. A novel smooth and discontinuous oscillator with strong irrational nonlinearities [J]. Science China-Physics, Mechanics & Astronomy, 2012, 55(10): 1832-1834.

[15] 景荣春. 四次方程解法改进[J]. 镇江船舶学院学报, 1990, 4(4): 79-84.

Study on Dynamical Behaviors of Asymmetrical SD Oscillator

Chen Jufeng[1], Zhang Jing[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang, 050043, China;
2. Department of Basic Courses, Shijiazhuang Post and Telecom Technical College, Shijiazhuang 050021, China)

Abstract: Based on SD oscillator, a new model of asymmetrical SD oscillator and its equation of motion are founded. Using the equivalence replacing method and substitution method to solve an eight times algebraic equation, the equilibria are analyzed to study the bifurcation of this system. The amplitude-frequency equations are obtained by the average method, and the numerical simulation is used to obtain the amplitude-frequency curve, the bifurcation diagram of the system, the phase diagrams and Poincare sections. The results show the system has rich nonlinear dynamic behaviors, which are different from an SD oscillator and will enrich the range of SD oscillator in research and application.

Key words: asymmetric SD oscillator; bifurcation; amplitude-frequency curve; chaos

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net