第28卷 第1期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 28 No. 1
2015年3月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Mar. 2015

含分数阶微分的二自由度悬架系统动力学分析

樊明辉， 申永军， 杨绍普

(石家庄铁道大学 机械工程学院，河北 石家庄 050043)

摘要: 研究了含分数阶项的二自由度悬架系统，利用改进的平均法、拉氏变换法、谐波平衡法和复频域法得到了简谐激励下系统响应的解析解，比较了解析解和数值解，二者逼近的精度很高，证明了解析解的准确性。分析了分数阶参数对悬架系统的动力学行为的影响，发现含分数阶微分悬架系统响应稳态幅值能够大幅降低，其动力学性能得到极大提高。

关键词: 分数阶; 二自由度悬架; 平均法; 拉氏变换法; 谐波平衡法; 复频域法

中图分类号: U461.1 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-0373(2015)01-0086-06

二自由度悬架系统能够反映出悬架的重要指标(舒适性、平顺性和安全性)，一直是悬架研究的热点之一。Mohammed Abu-Hilal[1]利用解析法研究了二自由度系统的不动点及系统在不动点处的幅频特性。申永军等[2]基于最优控制对汽车被动悬架参数进行了优化设计。张振华等[3]对二自由度悬架线性模型的最佳阻尼比进行了解析研究。陈宁等将分数阶理论应用到了车辆悬架的自适应控制和滑模变控制中[4-5]。

以二自由度悬架悬架为基础，引入分数阶微分项，分别采用平均法、谐波平衡法、拉氏变换法和复频域法对所建模型进行了解析研究，并分析了分数阶参数对车体位移传递率和相对位移(悬架变形)传递率的影响。

1 简谐激励下的解析研究

1.1 基于平均法的解析研究

研究如图1的含分数阶微分二自由度悬架系统。根据牛顿第二定律可得其运动微分方程

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + KD^p(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_0) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - KD^p(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中，c 为被动系统阻尼系数; $x_0 = X_0\cos\omega t$; m_1，m_2 分别为系统的簧载质量和非簧载质量; k_1，k_2 分别为系统的悬架刚度和轮胎刚度; x_1 和 x_2 分别为车体位移和轮胎位移; $D^p(x_1 - x_2)$ 为 $x_1 - x_2$ 关于时间 t 的 p 阶导数($0 \leqslant p \leqslant 1$); K 为分数阶系数且 $K \geqslant 0$。分数阶微积分的定义有很多种，本文采用 Caputo 定义[6]

$$D^p[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t \frac{x'(u)}{(t-u)^p}\mathrm{d}u \tag{2}$$

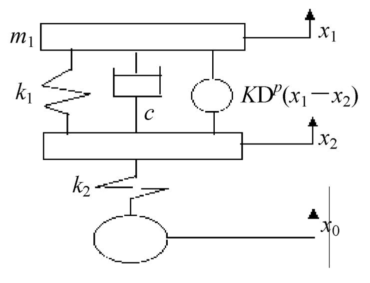


图1 含分数阶微分二自由度悬架模型

式中，$\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数，满足 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$。令 $x_1 - x_2 = x_r$，并做如下变换

收稿日期: 2013-09-24 责任编辑: 刘宪福 DOI: 10.13319/j.cnki.sjztddxxbzrb.2015.01.18

作者简介: 樊明辉(1986-)，男，硕士研究生，研究方向为车辆系统动力学及控制。E-mail: ffmmm007@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(11072158，11372198); 教育部新世纪优秀人才计划项目(NCET-11-0936)

樊明辉，申永军，杨绍普. 含分数阶微分的二自由度悬架系统动力学分析[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版，2014，28(1): 86-90.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\omega_1^2=\frac{k_1}{m_1},2\xi_1=\frac{c}{m_1},\omega_2^2=\frac{k_2}{m_2},2\xi_2=\frac{c}{m_2},\omega_r^2=\frac{k_1+k_2}{m_2},\lambda_1=\frac{K}{m_1},\lambda_2=\frac{K}{m_2}。$$

则可得到

$$\begin{cases}\ddot{x}_1+\omega_1^2x_r+2\xi_1\dot{x}_r+\lambda_1D^p(x_r)=0\\ \ddot{x}_1-\ddot{x}_r-\omega_r^2x_r+\omega_2^2x_1-2\xi_2\dot{x}_r-\lambda_2D^p(x_r)=\omega_2^2x_0\end{cases}\tag{3}$$

根据平均法，分别设 x_1 和 x_r 的解的形式为

$$\begin{cases}x_1=a_1\cos\varphi_1\\ \dot{x}_1=-\omega a_1\sin\varphi_1\end{cases},\begin{cases}x_r=a_r\cos\varphi_r\\ \dot{x}_r=-\omega a_r\sin\varphi_r\end{cases}\tag{4}$$

式中，$\varphi_1=\omega t+\theta_1$；$\varphi_r=\omega t+\theta_r$。

基于式(3)和式(4)可得

$$\begin{cases}\dot{a}_1=\dfrac{E}{\omega}\sin\varphi_1\\ a_1\dot{\theta}_1=\dfrac{E}{\omega}\cos\varphi_1\end{cases},\begin{cases}\dot{a}_r=\dfrac{F}{\omega}\sin\varphi_r\\ a_r\dot{\theta}_r=\dfrac{F}{\omega}\cos\varphi_r\end{cases}\tag{5}$$

式中，$E=\omega_1^2a_r\cos(\varphi_1+\theta_r-\theta_1)-2\xi_1\omega a_r\sin(\varphi_1+\theta_r-\theta_1)-a_1\omega^2\cos\varphi_1+\lambda_1D^p[a_r\cos(\varphi_1-\theta_1+\theta_r)]$；

$F=\omega_2^2X_0\cos(\varphi_r-\theta_r)+(\omega_1^2+\omega_r^2-\omega^2)a_r\cos\varphi_r-\omega_2^2a_1\cos(\varphi_r+\theta_1-\theta_r)-2(\xi_1+\xi_2)\omega a_r\sin\varphi_r+(\lambda_2+\lambda_1)D^p(a_r\cos\varphi_r)$。

对式(5)利用平均法[6]进行求解可得

$$\dot{a}_1=\frac{a_r\pi[-2\xi_1\omega\cos(\theta_1-\theta_r)+\omega_1^2\sin(\theta_1-\theta_r)]}{2\pi\omega}-\frac{1}{2}\lambda_1a_r\cos(\theta_1-\theta_r)\omega^{p-1}\sin\frac{p\pi}{2}+\frac{1}{2}\lambda_1a_r\sin(\theta_1-\theta_r)\omega^{p-1}\cos\frac{p\pi}{2}\tag{6a}$$

$$a_1\dot{\theta}_1=\frac{\pi[a_r\omega_1^2\cos(\theta_1-\theta_r)-a_1\omega^2+2\omega a_r\xi_1\sin(\theta_1-\theta_r)]}{2\pi\omega}+\frac{1}{2}\lambda_1a_r\cos(\theta_1-\theta_r)\omega^{p-1}\cos\frac{p\pi}{2}+\frac{1}{2}\lambda_1a_r\sin(\theta_1-\theta_r)\omega^{p-1}\sin\frac{p\pi}{2}\tag{6b}$$

$$\dot{a}_r=\frac{\pi[-2a_r(\xi_1+\xi_2)\omega+a_1\omega_2^2\sin(\theta_1-\theta_r)+X_0\omega_2^2\sin\theta_r]}{2\pi\omega}-\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)a_r\omega^{p-1}\sin\frac{p\pi}{2}\tag{6c}$$

$$a_r\dot{\theta}_r=\frac{\pi[a_r(\omega_1^2+\omega_r^2-\omega^2)-a_1\omega_2^2\cos(\theta_1-\theta_r)+X_0\omega_2^2\sin\theta_r]}{2\pi\omega}+\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)a_r\omega^{p-1}\cos\frac{p\pi}{2}\tag{6d}$$

将式(6)联立可得到关于稳态解 $\bar{a}_1$、$\bar{a}_r$、$\bar{\theta}_1$ 和 $\bar{\theta}_r$ 的四元非线性方程组。$\bar{a}_1$、$\bar{a}_r$ 分别代表了悬架系统的车体位移和悬架变形稳态幅值。

1.2　基于谐波平衡法的解析研究

设式(3)的近似解为

$$x_1=\bar{a}_1\cos(\omega t-\bar{\theta}_1),x_r=\bar{a}_r\cos(\omega t-\bar{\theta}_r)\tag{7}$$

将式(7)代入到式(3)中，进行化简计算可以得到关于 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 系数的方程组

$$-\omega^2\bar{a}_1\cos\bar{\theta}_1+\omega_1^2\bar{a}_r\cos\bar{\theta}_r+2\omega\xi_1\bar{a}_r\sin\bar{\theta}_r+\lambda_1\bar{a}_r\omega^p\cos\left(\bar{\theta}_r-\frac{p\pi}{2}\right)=0\tag{8a}$$

$$-\omega^2\bar{a}_1\sin\bar{\theta}_1+\omega_1^2\bar{a}_r\sin\bar{\theta}_r-2\omega\xi_1\bar{a}_r\cos\bar{\theta}_r+\lambda_1\bar{a}_r\omega^p\sin\left(\bar{\theta}_r-\frac{p\pi}{2}\right)=0\tag{8b}$$

$$(\omega_1^2+\omega_r^2-\omega^2)\bar{a}_r\cos\bar{\theta}_r-\omega_2^2\bar{a}_1\cos\bar{\theta}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\bar{a}_r\omega^p\cos\left(\bar{\theta}_r-\frac{p\pi}{2}\right)+2(\xi_1+\xi_2)\omega\bar{a}_r\sin\bar{\theta}_r=-X_0\omega_2^2\tag{8c}$$

$$(\omega_1^2+\omega_r^2-\omega^2)\bar{a}_r\sin\bar{\theta}_r-\omega_2^2\bar{a}_1\sin\bar{\theta}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\bar{a}_r\omega^p\sin\left(\bar{\theta}_r-\frac{p\pi}{2}\right)-2(\xi_1+\xi_2)\omega\bar{a}_r\cos\bar{\theta}_r=0\tag{8d}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

联立式(8)可得到关于稳态解 $\bar{a}_1$、$\bar{a}_r$、$\bar{\theta}_1$ 和 $\bar{\theta}_r$。

1.3 基于频率响应的拉氏变换法

由于 $x_0 = X_0\cos\omega t$,则 $x_0 = X_0 e^{i\omega t}$,则式(3)由拉氏变换可化为

$$\begin{cases} s^2X_1 + \omega_1^2X_r + 2\xi_1 sX_r + \lambda_1 s^pX_r = 0 \\ s^2X_1 - s^2X_r - \omega_r^2X_r + \omega_2^2X_1 - 2\xi_2 sX_r - \lambda_2 s^pX_r = \omega_2^2X_0e^{i\omega t} \end{cases} \tag{9}$$

设 $X_1 = H(j\omega)_{x_1\sim x_0}e^{j\omega t}$,$X_r = H(j\omega)_{x_r\sim x_0}e^{j\omega t}$,并令 $s = j\omega$ 有

$$\begin{cases} -\omega^2X_1 + \omega_1^2X_r + 2\xi_1 j\omega X_r + \lambda_1 j^p\omega^pX_r = 0 \\ -\omega^2X_1 - \omega^2X_r - \omega_r^2X_r + \omega_2^2X_1 - 2\xi_2 j\omega X_r - \lambda_2 j^p\omega^pX_r = \omega_2^2X_0e^{i\omega t} \end{cases} \tag{10}$$

根据上式可得

$$\bar{X}_1 = | H(j\omega)_{x_1\sim x_0} | = \frac{X_0\omega_2^2\sqrt{\left(2\omega\xi_1 + \lambda_1\omega^p\sin\frac{p\pi}{2}\right)^2 + \left(\omega_1^2 + \lambda_1\omega^p\cos\frac{p\pi}{2}\right)^2}}{\Delta_1} \tag{11a}$$

$$\bar{X}_r = | H(j\omega)_{x_r\sim x_0} | = \frac{X_0\omega^2\omega_2^2}{\Delta_1} \tag{11b}$$

式中,

$$\Delta_1^2 = \left[(-\omega^2 + \omega_2^2)\left(2\omega\xi_1 + \lambda_1\omega^p\sin\frac{p\pi}{2}\right) - \omega^2\left(2\omega\xi_2 + \lambda_2\omega^p\sin\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2 +$$
$$\left[(-\omega^2 + \omega_2^2)\left(\omega_1^2 + \lambda_1\omega^p\cos\frac{p\pi}{2}\right) - \omega^2\left(-\omega^2 + \omega_r^2 + \lambda_2\omega^p\cos\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2。$$

1.4 基于谐波平衡法的复频域方法

根据复数与谐波函数的关系可设

$$x_1 = Y_1e^{j\omega t}, x_r = Y_re^{j\omega t}, D^p(x_r) = Y_re^{j\frac{p\pi}{2}}\omega^pe^{j\omega t}。$$

将公式分别代入到式(3)中,可得到

$$-Y_1\omega^2e^{j\omega t} + \omega_1^2Y_re^{j\omega t} + 2\xi_1 j\omega Y_re^{j\omega t} + \lambda_1Y_re^{j\frac{p\pi}{2}}\omega^pe^{j\omega t} = 0 \tag{12a}$$

$$-Y_1\omega^2e^{j\omega t} + Y_r\omega^2e^{j\omega t} - \omega_r^2Y_re^{j\omega t} + \omega_2^2Y_1e^{j\omega t} - 2\xi_2 j\omega Y_re^{j\omega t} - \lambda_2e^{j\frac{p\pi}{2}}Y_r\omega^pe^{j\omega t} = \omega_2^2X_0e^{j\omega t} \tag{12b}$$

对式(12)进行求解得到稳态幅值 $\bar{Y}_1$ 和 $\bar{Y}_r$ 的解析形式

$$\bar{Y}_1 = \frac{X_0\omega_2^2\sqrt{\left(\omega_1^2 + \omega^p\lambda_1\cos\frac{p\pi}{2}\right)^2 + \left(2\omega\xi_1 + \lambda_1\omega^p\sin\frac{p\pi}{2}\right)^2}}{\Omega} \tag{13a}$$

$$\bar{Y}_r = \frac{X_0\omega^2\omega_2^2}{\Omega} \tag{13b}$$

式中,

$$\Omega^2 = \left[-2\omega^3\xi_1 + 2\omega\omega_2^2\xi_1 - 2\omega^3\xi_2 + \omega_2^2\lambda_1\omega^p\sin\frac{p\pi}{2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\omega^{2+p}\sin\frac{p\pi}{2}\right]^2 +$$
$$\left[\omega^4 - \omega^2\omega_1^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - \omega^2\omega_r^2 - \omega^{p+2}(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\frac{p\pi}{2} + \omega^p\omega_2^2\lambda_1\cos\frac{p\pi}{2}\right]^2。$$

2 数值仿真及分析

数值解的解法采用文献[7]给出的算法,关于该方法的算例和精度分析可以参考文献[6-7]。该方法的近似公式为

$$D^p[x(t_l)] \approx h^{-p}\sum_{j=0}^{l} C_j^p x(t_{l-j}) \tag{14}$$

式中,$t_l = lh$ 为采样时间点;h 为时间步长;C_j^p 为分数阶二项式系数,并且具有如下迭代关系

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C_0^p = 1, C_j^p = \left(1 - \frac{1+p}{j}\right) C_{j-1}^p \tag{15}$$

基本参数为 $m_1 = 240$ kg, $m_2 = 36$ kg, $k_1 = 16\ 000$ N/m, $k_2 = 16\ 000$ N/m, $c = 1\ 000$ N·s/m, $X_0 = 0.01$ m, $p = 0.5$, $K = 500$，其单位与分数阶次 p 有关。仿真过程中选取 400 s 作为仿真时间以保证足够长时间，时间步长为 0.005 s 以保证数值精度。选取后 100 s 分析，选取其中最大的值作为稳态幅值，解析解与数值解见于图 2 ~ 图 5 中，可见二者吻合良好，解析解的结果有很高的精度。

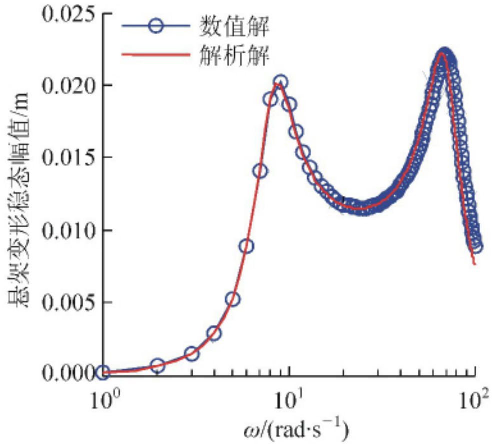


图 2　基于平均法的解析解

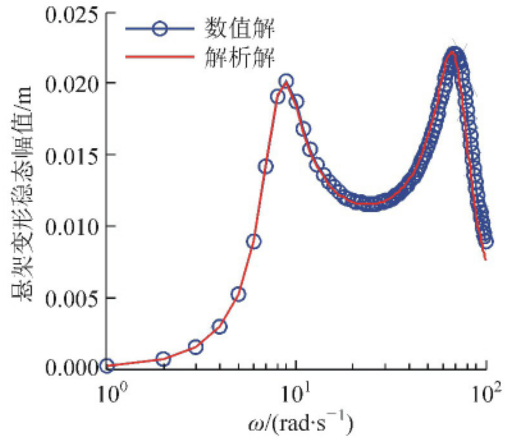


图 3　谐波平衡法的解析解

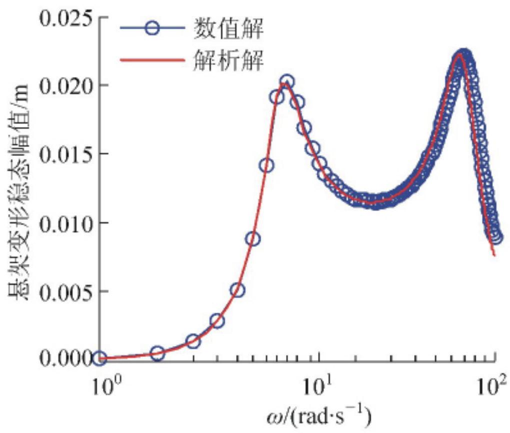


图 4　拉氏变换的频响解析解

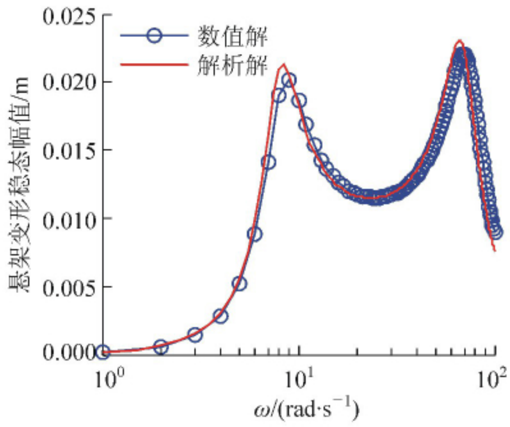


图 5　复频域解析解

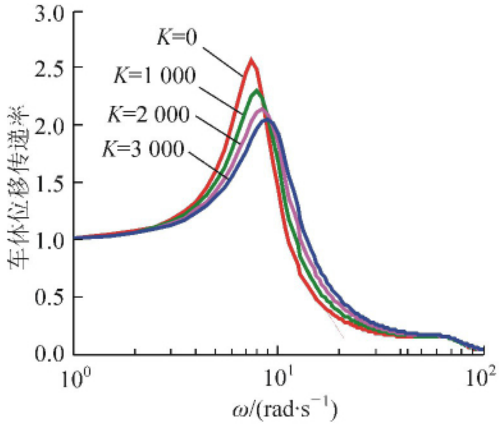
下面分析分数阶系数 K 对车体位移传递率和相对位移传递率的影响，选定 $p = 0.5$, K 分别取 0、1 000、2 000、3 000，图 6 给出了比较结果。可见，车体位移传递率和相对位移(悬架变形) 传递率的峰值随分数阶系数的增大而减小，即分数阶微分项系数 K 的增大有效降低了稳态幅值。

下面分析分数阶阶次 p 变化时对车体位移传递率和相对位移传递率的影响，选定 $K = 1\ 000$, p 分别取 0.1、0.3、0.7、0.9，图 7 给出了比较结果。可见，车体位移传递率和相对位移(悬架变形) 传递率的峰值随分数阶阶次的增大而减小，即分数阶阶次 p 的增大有效降低了稳态幅值。

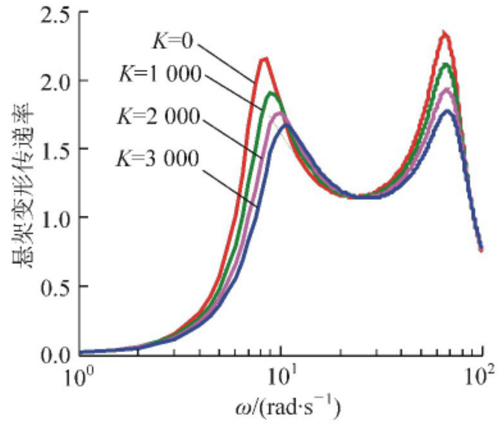
3　结论

研究了含分数阶二自由度悬架系统，利用不同方法得到了简谐激励下的解析解，并用数值方法验证了解析解的正确性。分析了分数阶参数对系统动力学行为的影响，这就为分数阶微分在悬架中的应用提供了有价值的借鉴。本文的分析方法为也汽车悬架理论研究提供了参考。

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

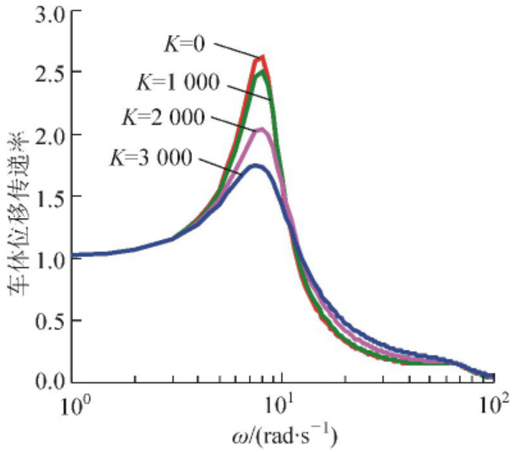


(a)分数阶系数 K 对车体位移传递率的影响

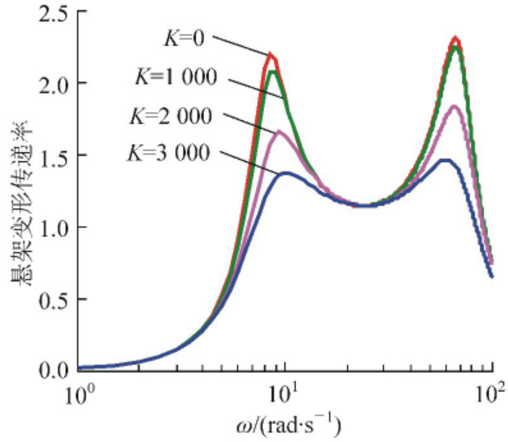


(b)分数阶系数 K 对悬架变形传递率的影响

图6 分数阶系数 K 对车体响应稳态幅值的影响



(a)分数阶参数 P 对车体位移传递率的影响



(b)分数阶参数 P 对悬架位移传递率的影响

图7 分数阶阶次 p 对车体响应稳态幅值的影响

参 考 文 献

[1] Mohammed Abu-Hilal. Fixed points of two-degree of freedom systems [J]. Shock and Vibration, 1998(5): 199-205.

[2] 申永军,刘献栋,杨绍普. 基于最优控制的汽车被动悬架参数优化设计 [J]. 振动、测试与诊断,2004,24(2): 96-99.

[3] 张振华,董明明. 2自由度车辆悬架线性模型最佳阻尼比的解析分析 [J]. 北京理工大学学报: 自然科学版,2008,25(12): 1057-1059.

[4] 陈宁,陈南,王乃洲,等. 基于分数阶参考模型的车辆悬架自适应控制 [J]. 南京林业大学: 自然科学版,2009,33(3): 116-120.

[5] 陈宁,台永鹏,陈南. 分数微积分理论在非线性车辆悬架滑模控制中的应用 [J]. 动力学与控制学报,2009,7(3): 258-263.

[6] 申永军,杨绍普,邢海军. 含分数阶微分的线性单自由度振子的动力学分析 [J]. 物理学报,2012,61(11): 110505.

[7] Ivo Petras. Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

(下转第95页)

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[4] 高强，杜小山，范虹，等. 滚动轴承故障的 EMD 诊断方法研究 [J]. 振动工程学报，2007，20(1): 15-18.
[5] 唐德尧，王定晓，杨政明，等. 共振解调技术与机车车辆传动装置故障诊断 [J]. 电力机车技术，2002，25(5): 1-5.
[6] 胥永刚，马海龙，付胜，等. 机电设备早期故障微弱信号的非线性检测方法 [J]. 振动工程学报，2011，24(5): 529-538.
[7] 吕志民，徐金梧，翟绪圣. 分形维数及其在滚动轴承故障诊断中应用 [J]. 机械工程学报，1999，35(2): 88-91.
[8] 王利英，杨绍普，王欢，等. 李雅普指数在轴承故障诊断中的应用研究 [J]. 噪声与振动控制，2007，5(1): 104-106.
[9] 关贞珍，郑海起，杨云涛，等. 基于非线性几何不变量的轴承故障诊断方法研究 [J]. 振动与冲击，2009，28(11): 130-133.
[10] Grassberger P, Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors [J]. Physica D, 1983, 9: 189-208.
[11] Kim H S, Eykholt R, Salas J D. Nonlinear dynamics, delay times, and embedding windows [J]. Physica D, 1999, 127: 48-60.
[12] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica 16D, 1985, 16: 285-317.
[13] Vapnik V N. 统计学习理论的本质 [M]. 北京: 清华大学出版社，2000.
[14] Yang J Y, Zhang Y Y, Zhu Y S. Intelligent fault diagnosis of rolling element bearing based on SVMs and fractal dimension [J]. Mechanical System and Signal Processing, 2007, 21(5): 2012-2024.

Fault Diagnosis of Rolling Bearing Based on Characteristic Auantities of Chaotic Attractor

Gu Xiaohui[1,2], Liu Yongqiang[1,2], Yang Shaopu[1,2], Liao Yingying[2]

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;
2. Key Laboratory of Traffic Safety and Control in Hebei, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: The characteristic quantities have good performance in reflecting the nonlinear dynamics of rolling bearing in different fault conditions. A method of fault diagnosis of rolling bearing based on correlation dimension, largest Lyapunov exponent and information entropy is proposed. The classification abilities of each feature are evaluated by using support vector machines, as well as the combination of two quantities. The study shows that each type of quantity contains different fault information and the combination of these can significantly improve the recognition rate. The experimental results also show that these three characteristic quantities can effectively identify the different types of fault and also the same fault with different levels.

Key words: fault diagnosis; chaotic attractor; characteristic quantities; support vector machines

(上接第 90 页)

Dynamical Analysis of Two-degree of Freedom Suspension System with Fractional-order Derivative

Fan Minghui, Shen Yongjun, Yang Shaopu

(Department of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, ShiJiazhuang 050043, China)

Abstract: The passive suspension system with fractional-order derivative is studied. Analytic solutions of system under harmonic excitation eventually are obtained by improved averaging method, laplace-transform method, harmonic balance method and complex frequency-domain method. The analytic solutions prove to be accurate compared with numerical solutions. Effect of fractional-order parameters on dynamical behavior is analyzed. The research indicates that, the steady-state amplitude of passive suspension system with fractional-order derivative could be significantly reduced and dynamical behavior can be greatly improved.

Key words: fractional-order; two degree-of-freedom suspension; averaging method; laplace-transform method; harmonic balance method; complex frequency-domain method

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net