第 27 卷 第 2 期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 27 No. 2
2014 年 6 月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Jun. 2014

轮图与舵轮图的超边优美标号

贾慧羡[1]， 左大伟[2]

(1. 石家庄邮电职业技术学院 基础部,河北 石家庄 050021;2. 石家庄铁道大学 数理系,河北 石家庄 050043)

摘要:1994 年, Mitchem 和 Simoson 在研究标号图的问题时,提出了超边优美图的概念。在随后的研究中,一些图被证明具有超边优美性质,同时关于超边优美图的一些猜想也被提出。本文利用递归方法构造了轮图 W_n 与舵轮图 H_n 的超边优美标号,证明了这两类图是超边优美图。

关键词:轮图;舵轮图;超边优美标号

中图分类号:O157 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-0373(2014)02-0105-06

0 引言

1967 年 Rosa 引入了 β- 值作为研究完全图分解为同构子图的工具,这就是现在称之为优美标号的雏形。图标号问题主要来源于实际问题,如今其研究成果广泛应用于交换网络理论、X-射线结晶学、射电天文学、雷达和循环设计等领域。

1985 年,S. P. Lo[1] 首次提出边优美图的概念, 并给出边优美图的必要条件。关于图的边优美性, Lee[2] 提出了一个猜想:所有奇数阶的树都是边优美的。有关图的边优美性更多可参考文献[3-4]。

1994 年, Mitchem 和 Simoson[5] 给出了超边优美图的定义。文献[3]中 Lee 等人证明了 $K(1,n)$ 当且仅当 n 是偶数时是超边优美的,双星图 $DS(m,n)$ 当且仅当 m,n 都是奇数时是超边优美的,同时他们还猜想:所有奇数阶的树都是超边优美的。文献[6]给出了一些三正则图是超边优美的。目前,超边优美标号的研究还处于起步阶段,研究成果非常有限。

在标号图的讨论中,轮图和舵轮图研究较多。1978 年,C. Hoede 和 H. Kuiper[7] 证明了所有的轮图 W_n 都是边优美图。1993 年,文献[8]给出了轮图 W_n 优美标号的性质。1989 年,文献[9]证明了舵轮图的优美性。本文讨论了轮图 W_n 与舵轮图 H_n 超边优美性,证明了这两类图是超边优美的。

1 预备知识

定义 1 超边优美图

令

$$P=\begin{cases}\left\{-\frac{p}{2},-\frac{p}{2}+1,\cdots,-1,1,\cdots,\frac{p}{2}\right\} & p\text{ 是偶数}\\ \left\{-\frac{p-1}{2},-\frac{p-1}{2}+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{p-1}{2}\right\} & p\text{ 是奇数}\end{cases},$$

$$Q=\begin{cases}\left\{-\frac{q}{2},-\frac{q}{2}+1,\cdots,-1,1,\cdots,\frac{q}{2}\right\} & q\text{ 是偶数}\\ \left\{-\frac{q-1}{2},-\frac{q-1}{2}+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{q-1}{2}\right\} & q\text{ 是奇数}\end{cases}。$$

称 (p,q)- 图 G 是超边优美图,如果存在一个双射 $f:E\rightarrow Q$,使得它的导出映射

DOI:10. 13319/j. cnki. sjztddxxbzrb. 2014. 02. 23

收稿日期:2013-09-24

作者简介:贾慧羡 女 1979 年出生 讲师

基金项目:河北省教育厅资助科研项目(Z2013057)

$$f^{+}: V \to P, u \mapsto \sum_{(u,v) \in E} f(u,v)$$

也是一个双射,则 f 称为图 G 的超边优美标号,集合 P 和 Q 相应称为图 G 的顶点值集和边标号集。

定义 2 轮图 W_n

由 n 回路 C_n 的每一个顶点都与同一个不在 C_n 上的顶点 O 相连所得到的图,记作 W_n。

它有 $(n+1)$ 个顶点:O;$A_1, A_2, \cdots, A_n$,同时包含 $2n$ 条边,其中:

A_i 与 $A_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 相邻(记 $A_{n+1} = A_1$),O 与 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 相邻。

在该图中,称顶点 O 为中心,$OA_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为轮辐。

定义 3 舵轮图 H_n

由 n 回路 C_n 的每一个顶点都与同一个不在 C_n 上的顶点 O 相连,然后在 C_n 的每点再增加一条悬边而得到的图,记作 H_n。易见,在轮图 C_n 之边缘的每个点上,添加一条悬挂边即为舵轮图。

它有 $(2n+1)$ 个顶点:O;$A_1, A_2, \cdots, A_n$;$B_1, B_2, \cdots, B_n$,同时包含 $3n$ 条边,其中:

A_i 与 $A_{i+1}, B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 相邻(记 $A_{n+1} = A_1$),O 与 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 相邻。

在该图中,称顶点 O 为中心,$OA_i, A_iB_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为轮辐。

令 a, m 是整数,$m > 0$,方便起见,采用记号:

$$[a, a+m] = \{a, a+1, a+2, \cdots, a+m-1, a+m\};$$

$$[a, a+2m]_2 = \{a, a+2, a+4, \cdots, a+2m-2, a+2m\}。$$

2 轮图 W_n 的超边优美标号的构造

轮图 W_n,包含 $(n+1)$ 个顶点和 $2n$ 条边。易见,顶点数的奇偶性由 n 的奇偶性确定,边数为偶数,故定义中的

$$P = \begin{cases} \left\{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}\right\} & n \text{ 是偶数} \\ \left\{-\frac{n+1}{2}, -\frac{n+1}{2}+1, \cdots, -1, 1, \cdots, \frac{n+1}{2}-1, \frac{n+1}{2}\right\} & n \text{ 是奇数} \end{cases},$$

$$Q = \{-n, -(n-1), \cdots, -1, 1, \cdots, n-1, n\}。$$

因为 n 的奇偶性不同,本文分两种情况讨论:

n 是偶数时,$P = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right]$,$Q = [-n, -1] \cup [1, n]$;

n 是奇数时,$P = \left[-\frac{n+1}{2}, -1\right] \cup \left[1, \frac{n+1}{2}\right]$,$Q = [-n, -1] \cup [1, n]$。

我们的任务是定义一个双射 $f: E(W_n) \to Q$,使得它的导出映射

$$f^{+}: V(W_n) \to P, u \mapsto \sum_{(u,v) \in E} f(u,v)$$

也是一个双射。

定理 1 当 n 是正整数时,图 W_n 是超边优美图。

证明:令

轮辐标号:$f(OA_i) = \begin{cases} -n, & i = 1 \\ -i+1, & i \in [2, n] \end{cases}$,

圈标号:$\begin{cases} f(A_iA_{i+1}) = i, i \in [1, n-1] \\ f(A_nA_1) = n \end{cases}$。

$i \in [1, n]$,$f(OA_i)$ 的 f- 值恰充满集合 $[-n, -1]$;$f(A_iA_{i+1})$ 的 f- 值恰充满集合 $[1, n]$。所有边的 f- 值恰充满集合 $Q = [-n, -1] \cup [1, n]$,故 $f: E(W_n) \to Q$ 是一个双射。下面只需证明导出的各点的 f^{+} - 值是 $V(W_n) \to P$ 的一个双射即可。

情况 1 当 $n \equiv 1 (\bmod 2)$ 时

$$f^+(O) = -\frac{n+1}{2},$$

$$f^+(A_i) = \begin{cases} i, & i \in \left[1,\frac{n+1}{2}\right] \\ -n+i-1, & i \in \left[\frac{n+3}{2},n\right] \end{cases}。$$

对于点 O,其 f^+ - 值充满集合 $\left\{-\frac{n+1}{2}\right\}$。

$i \in \left[1,\frac{n+1}{2}\right]$,$f^+(A_i)$- 值恰充满集合 $\left[1,\frac{n+1}{2}\right]$;

$i \in \left[\frac{n+3}{2},n\right]$,$f^+(A_i)$- 值恰充满集合 $\left[-\frac{n-1}{2},-1\right]$。

即对于 $i \in [1,n]$,$f^+(A_i)$- 值恰充满集合 $\left[-\frac{n-1}{2},-1\right] \cup \left[1,\frac{n+1}{2}\right]$。

综上,所有点的 f^+ - 值恰充满集合 $P = \left[-\frac{n+1}{2},-1\right] \cup \left[1,\frac{n+1}{2}\right]$。

故当 $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时,$f^+: V(W_n) \to P$ 是一个双射。

情况 2　当 $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时

$$f^+(O) = 0,$$

$$f^+(A_i) = \begin{cases} i, & i \in \left[1,\frac{n}{2}\right] \\ -n+i-1, & i \in \left[\frac{n}{2}+1,n\right] \end{cases}。$$

对于点 O,其 f^+ - 值充满集合 $\{0\}$。

$i \in \left[1,\frac{n}{2}\right]$,$f^+(A_i)$- 值恰充满集合 $\left[1,\frac{n}{2}\right]$;

$i \in \left[\frac{n}{2}+1,n\right]$,$f^+(A_i)$- 值恰充满集合 $\left[-\frac{n}{2},-1\right]$。

即对于 $i \in [1,n]$,$f^+(A_i)$- 值恰充满集合 $\left[-\frac{n}{2},-1\right] \cup \left[1,\frac{n}{2}\right]$。

综上,所有点的 f^+ - 值恰充满集合 $P = \left[-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right]$,故当 $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时,$f^+: V(W_n) \to P$ 是一个双射。

因此,当 n 是正整数时,图 W_1^n 是超边优美图。

3　舵轮图 H_n 的超边优美标号的构造

舵轮图 H_n,包含 $(2n+1)$ 个顶点和 $3n$ 条边。易见,顶点数目为奇数,边数的奇偶性由 n 的奇偶性确定。故定义中的

$$P = \{-n, -(n-1), \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n\},$$

$$Q = \begin{cases} \left\{-\frac{3n}{2}, -\frac{3n}{2}+1, \cdots, -1, 1, \cdots, \frac{3n}{2}-1, \frac{3n}{2}\right\} & n \text{ 是偶数} \\ \left\{-\frac{3n-1}{2}, -\frac{3n-1}{2}+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{3n-1}{2}-1, \frac{3n-1}{2}\right\} & n \text{ 是奇数} \end{cases}。$$

因为 n 的奇偶性不同,本文分两种情况讨论:

n 是偶数时,$P = [-n,n]$,$Q = \left[-\frac{3n}{2},-1\right] \cup \left[1,-\frac{3n}{2}\right]$;

n 是奇数时,$P = [-n,n]$,$Q = \left[-\frac{3n-1}{2},\frac{3n-1}{2}\right]$。

我们的任务是定义一个双射 $f:E(H_n)\to Q$,使得它的导出映射

$$f^{+}:V(H_n)\to P,u\mapsto\sum_{(u,v)\in E}f(u,v)$$

也是一个双射。

定理 2 当 n 是正偶数时,图 H_n 是超边优美图。

证明:令

轮辐标号:$f(OA_i)=\begin{cases}n+1-i, & i\in\left[1,\frac{n}{2}\right]\\ -i, & i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]\end{cases}$,

$$f(A_iB_i)=\begin{cases}i, & i\in\left[1,\frac{n}{2}\right]\\ -n+i-1, & i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]\end{cases}。$$

圈标号:$\begin{cases}f(A_iA_{i+1})=\begin{cases}\frac{3n-i+1}{2}, & i\in[1,n-1]_2\\ -n-\frac{i}{2}, & i\in[2,n-2]_2\end{cases}\\ f(A_nA_1)=-\frac{3n}{2}\end{cases}$。

$i\in\left[1,\frac{n}{2}\right]$,$f(OA_i)$ 的值恰充满集合$\left[\frac{n}{2}+1,n\right]$;

$i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]$,$f(OA_i)$ 的值恰充满集合$\left[-n,-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$。

即对于 $i\in[1,n]$,$f(OA_i)$ 的值恰充满集合$\left[-n,-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\cup\left[\frac{n}{2}+1,n\right]$。

$i\in\left[1,\frac{n}{2}\right]$,$f(A_iB_i)$ 的值恰充满集合$\left[1,\frac{n}{2}\right]$;

$i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]$,$f(A_iB_i)$ 的值恰充满集合$\left[-\frac{n}{2},-1\right]$。

即对于 $i\in[1,n]$,$f(A_iB_i)$ 的值恰充满集合$\left[-\frac{n}{2},-1\right]\cup\left[1,\frac{n}{2}\right]$。

$i\in[1,n-1]_2$,$f(A_iA_{i+1})$ 的值恰充满集合$\left[n+1,\frac{3n}{2}\right]$;

$i\in[2,n-2]_2$,$f(A_iA_{i+1})$ 的值恰充满集合$\left[-\frac{3n}{2}+1,-(n+1)\right]$。

即圈标号充满集合$\left[-\frac{3n}{2},-(n+1)\right]\cup\left[n+1,\frac{3n}{2}\right]$。

综上,所有边的 f- 值恰充满集合 $Q=\left[-\frac{3n}{2},-1\right]\cup\left[1,\frac{3n}{2}\right]$,故 $f:E(H_n)\to Q$ 是一个双射。

进而,可知导出的各点的 f^{+} - 值如下:

$$f^{+}(O)=0,$$

$$f^{+}(A_i)=\begin{cases}-n, & i=1\\ \frac{n}{2}-i+1, & i\in\left[2,\frac{n}{2}\right]\\ \frac{3n}{2}-i+1, & i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]\end{cases}$$

$$f^{+}(B_i)=f(A_iB_i)\bmod(2n+1)=\begin{cases}i, & i\in\left[1,\frac{n}{2}\right]\\ -n+i-1, & i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]\end{cases}。$$

对于点 O,其 f^{+} - 值充满集合 $\{0\}$。

$i=1$,$f^{+}(A_i)$ - 值恰充满集合 $\{-n\}$;

$i\in\left[2,\frac{n}{2}\right]$,$f^{+}(A_i)$ - 值恰充满集合 $\left[-(n-1),-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$;

$i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]$,$f^{+}(A_i)$ - 值恰充满集合 $\left[\frac{n}{2}+1,n\right]$。

即对于 $i\in[1,n]$,$f^{+}(A_i)$ - 值恰充满集合 $\left[-n,-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\cup\left[\frac{n}{2}+1,1\right]$。

$i\in\left[1,\frac{n}{2}\right]$,$f^{+}(B_i)$ - 值恰充满集合 $\left[1,\frac{n}{2}\right]$;

$i\in\left[\frac{n}{2}+1,n\right]$,$f^{+}(B_i)$ - 值恰充满集合 $\left[-\frac{n}{2},-1\right]$。

即对于 $i\in[1,n]$,$f^{+}(B_i)$ - 值恰充满集合 $\left[-\frac{n}{2},-1\right]\cup\left[1,\frac{n}{2}\right]$。

综上,所有点的 f^{+} - 值恰充满集合 $P=[-n,n]$ 故 $f^{+}:V(H_n)\to P$ 是一个双射。

故当 n 是正偶数时,f 确是图 H_n 的一个超边优美双射,故图 H_n 是超边优美图。

定理 3　当 n 是正奇数时,图 H_n 是超边优美图。

证明:令

轮辐标号:$f(OA_i)=-\frac{n+1}{2}-i+1,i\in[1,n]$,

$$f(A_iB_i)=\frac{n+1}{2}+i-1,i\in[1,n]。$$

$$\text{圈标号:}\begin{cases}f(A_iA_{i+1})=\begin{cases}\frac{n-i}{2}, & i\in[1,n-2]_2\\ -\frac{i}{2}, & i\in[2,n-1]_2\end{cases}。\\ f(A_nA_1)=0\end{cases}$$

$i\in[1,n]$,$f(OA_i)$ 的值恰充满集合 $\left[-\frac{3n-1}{2},-\frac{n+1}{2}\right]$。

$i\in[1,n]$,$f(A_iB_i)$ 的值恰充满集合 $\left[\frac{n+1}{2},\frac{3n-1}{2}\right]$。

$i\in[1,n-2]_2$,$f(A_iA_{i+1})$ 的值恰充满集合 $\left[1,\frac{n-1}{2}\right]$;

$i\in[2,n-1]_2$,$f(A_iA_{i+1})$ 的值恰充满集合 $\left[-\frac{n-1}{2},-1\right]$。

即圈标号恰充满集合 $\left[-\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right]$。

综上,所有边的 f- 值恰充满集合 $Q=\left[-\frac{3n-1}{2},\frac{3n-1}{2}\right]$,故 $f:E(H_n)\to Q$ 是一个双射。

进而,可知导出的各点的 f^{+} - 值如下:

$$f^{+}(O)=\frac{n+1}{2},f^{+}(A_i)=\frac{n-1}{2}-i+1,i\in[1,n],$$

$$f^{+}(B_i)=f(A_iB_i)\bmod(2n+1)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}+i-1, & i\in\left[1,\dfrac{n+1}{2}\right]\\ -\dfrac{3n+3}{2}+i, & i\in\left[\dfrac{n+3}{2},n\right]\end{cases}。$$

对于点 O,其 f^{+} - 值充满集合 $\left\{-\dfrac{n+1}{2}\right\}$。

$i\in[1,n]$,$f^{+}(A_i)$- 值恰充满集合 $\left[-\dfrac{n-1}{2},\dfrac{n-1}{2}\right]$。

$i\in\left[1,\dfrac{n+1}{2}\right]$,$f^{+}(B_i)$- 值恰充满集合 $\left[\dfrac{n+1}{2},n\right]$;

$i\in\left[\dfrac{n+1}{2}+1,n\right]$,$f^{+}(B_i)$- 值恰充满集合 $\left[-n,-\dfrac{n+3}{2}\right]$。

即对于 $i\in[1,n]$,$f^{+}(B_i)$- 值恰充满集合 $\left[-n,-\dfrac{n+3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{n+1}{2},n\right]$。

综上,所有点的 f^{+} - 值恰充满集合 $P=[-n,n]$,故 $f^{+}:V(H_n)\to P$ 是一个双射。

故当 n 是正奇数时,f 确是图 H_n 的一个超边优美双射,故图 H_n 是超边优美图。

定理 4 当 n 是正整数时,图 H_n 是超边优美图。

证明:由定理 2 和定理 3 知,该命题成立。

参 考 文 献

[1]Lo S P. On edge-graceful labelings of graphs[J]. Congressus Numerantium,1985,50:231-241.

[2]Lee S M. A conjecture on edge-graceful trees[J]. Scientia,1989,3:45-47.

[3]Gallian J A. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2009,DS6(9): 219.

[4]贾慧羡,左大伟. 图 $K_1\times\bigcup_{t=1}^{m}C_{2n_t}$ 的 k -边优美指标集[J]. 石家庄铁道大学学报:自然科学版,2012,25(4):102-108.

[5]Mitchem J,Simoson A. On Edge-graceful and Super-Edge-Graceful Graphs[J]. Ars Combinatoria,1994,37:97-111.

[6]Shiu W C. Super-edge-graceful labelings of some cubic graphs[J]. Acta Mathematica Sinica, 2006,6: 1621-1628.

[7]Hoede C,Kuiper H. All wheels are graceful[J]. Utilitas Math,1987,14: 311-316.

[8]黄国泰. 关于轮图优美标号的性质[J]. 数学研究与评论,1993,13(1):40-42.

[9]凌捷. 舵图的优美性[J]. 高校应用数学学报,1989,4(4): 590-592.

Super-edge-graceful Labelings of Wheel Graphs and Helms Graphs

Jia Huixian[1], Zuo Dawei[2]

(1. Department of basic, Shijiazhuang Post and Telecommunication Technical College, Shijiazhuang 050021, China;
2. Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: In 1994, Mitchem and Simoson introduced the notion of super edge-graceful graphs when they studied the problem of the labeling graph. In the course of subsequent studies, it is proven that some graphs are super edge-graceful and some conjections on super edge-graceful graphs are introduced. In this paper the super edge-graceful labelings of the wheel graphs W_n and helms graphs H_n are constructed by recursion ,and it is proven that they are super edge-graceful graphs.

Key words: wheel graph; helms graph; super edge-graceful

(责任编辑 刘宪福)