

变截面压杆的临界荷载计算

马宝平, 郭树起, 冯自进

(石家庄铁道大学 工程力学系 河北 石家庄 050043)

摘要: 变截面杆件的临界荷载问题,其平衡方程为变系数微分方程,只有少部分的情况可以得到其解析解,采用改进的 WBK 法,计算了若干变截面压杆的临界荷载,并与有限差分法进行了对比,证实了其可靠性。

关键词: 变截面; 临界荷载; 压杆

中图分类号: TB121 文献标识码: A 文章编号: 2095-0373(2013)02-0106-05

0 引言

在通常的结构构件设计中,杆件都是等截面的。随着材料性能的日益改进和设计理念的更新,同时出于现代结构形式的多样化和经济化方面的角度考虑,通常将杆件制成各种变截面。结构失稳具有突发性,材料的制作存在几何缺陷、安装时的偏差等都可能造成结构的失稳,失稳后结构不能再正常工作,甚至产生严重的经济损失和人员伤亡,因而结构的稳定性问题受到工程界的重视。等截面压杆的临界荷载的计算已基本被解决。变截面杆件的整体稳定性研究分析仍旧是目前国内外学者所追求的一个研究热点。变截面压杆稳定问题中的变系数微分方程,采用传统的 WBK 法求解计算量较大,收敛的速度较慢。

1 变截面压杆的稳定

实际的工程中,两端铰支的变截面压杆经常遇到,假设其失稳形式如图 1 所示,不考虑压杆的自重及剪切变形。截面刚度为 $EI(x)$,杆长为 l ,杨氏模量 E ,由等截面压杆的微分方程可得^[1]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p}{EI(x)} y = 0 \quad (1)$$

应用变换 $\xi = \frac{x}{l}$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{pl^2}{EI(\xi)} y = 0 \quad (2)$$

令 $k(\xi) = \frac{pl^2}{EI(\xi)}$ 得

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + k(\xi) y = 0 \quad (3)$$

假设方程的解的形式为^[2]

$$y(\xi) = u(\xi) e^{iq(\xi)} \quad (4)$$

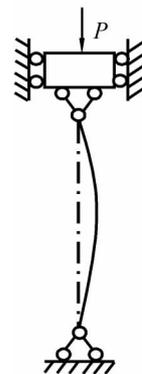


图 1 变截面压杆示意图

收稿日期: 2012-11-18

作者简介: 马宝平 男 1986 年出生 硕士研究生

基金项目: 国家自然科学基金(11272219, 11072157)

式中 $\mu(\xi)$ $q(\xi)$ 都是实函数 $i = \sqrt{-1}$ 。

代入到式(3)中得

$$2wu' + uw' = 0 \tag{5}$$

$$u'' - w^2u + k(\xi)u = 0 \tag{6}$$

式中 $w(\xi) = \frac{dq(\xi)}{d\xi}$ 。

式(5)的解为

$$u(\xi) = u(\xi_0) \sqrt{\frac{w(\xi_0)}{w(\xi)}} \tag{7}$$

代入到式(6)中

$$\frac{3}{4} \frac{\left(\frac{dw(\xi)}{d\xi}\right)^2}{w^2(\xi)} - \frac{1}{2} \frac{d^2w(\xi)}{w(\xi)} - w^2(\xi) + k(\xi) = 0 \tag{8}$$

假设式(8)的级数解形式为

$$w(\xi) = \sqrt{k(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(\xi)}{k^n(\xi)}} \tag{9}$$

把式(9)代入到式(8)中确定 $C_n(\xi)$

$$\left(-k^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{nc_n k''}{k^{n+1}} + \frac{(n^2+n)c_n k^2}{k^{n+2}} + \frac{4c_n}{k^{n-1}} + \frac{c_n \xi \xi}{k^n} - \frac{2nk'c_n \xi}{k^{n+1}}\right) - 4\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{k^n}\right)^2\right)w^2(\xi) + \frac{5}{4}\left(k' - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc_n k'}{k^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \xi}{k^n}\right)^2 = 0。$$

整理上式,各阶 $k(\xi)$ 的系数为零可得

$$(-k'' - 4c_1)k - 4c_2 - c_1 \xi \xi + \frac{5}{4}k^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4c_{n+2} + \bar{c}_n}{k^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5\hat{c}_n/4 - \bar{c}_n}{k^n} - 4 \sum_{n=i+j+k=3}^{\infty} \frac{c_i c_j c_k}{k^n} = 0;$$

$$\bar{c}_n = -(n+1)c_n k'' + (n+2.5)(n-1)c_{n-1} k^2 + c_{n+1} \xi \xi - (2n+2.5)k'c_n;$$

$$\bar{c} = \sum_{j=1}^{n-1} c_{n-j} [-(j-1)c_{j-1} k'' + (j-2)(j-1)c_{j-2} k^2 + 8c_{j+1} + c_j \xi \xi - 2(j-1)k'c_{j-1} \xi];$$

$$\hat{c} = \sum_{j=1}^{n-1} ((j-1)(n-j-1)c_{j-1}c_{n-j-1}k^2 + c_j \xi c_{n-j} \xi - 2(j-1)c_{j-1}c_{j-1} \xi k');$$

$$c_1 = -\frac{k''}{4} \quad c_2 = -\frac{1}{4}c_1 \xi \xi + \frac{5}{16}k^2 \quad c_3 = -\frac{1}{4}c_2 \xi \xi + \frac{9}{8}k'c_1 \xi + c_1^2;$$

$$c_4 = \frac{5}{16}c_1^2 \xi - 2c_1c_2 - \frac{1}{4}c_1c_1 \xi \xi, \quad -\frac{9}{8}c_1k^2 - \frac{1}{4}c_3 \xi \xi + \frac{13}{8}c_2 \xi k'。$$

$n \geq 5$ 时,可得 c_n 的递推表达式

$$c_n = -\frac{1}{4}\bar{c}_{n-2} + \frac{5}{16}\hat{c}_{n-2} - \frac{1}{4}\bar{c}_{n-2} - \sum_{m=2}^{n-3} \left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i c_{m-i}\right) c_{n-2-m} \tag{10}$$

从 ξ_0 到 ξ 积分可得 $q(\xi)$ 的表达式

$$q(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{k(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(s)}{k^n(s)}} d\xi \tag{11}$$

2 截面的惯性矩 $I(x) = I_0(x/a)^n$

(1) $n=1$ 时杆的形式为厚度等于常数而宽度变化的板^[3] $I(x) = I_0\left(\frac{x}{a}\right)$ ($a \leq x \leq a+l$) 压杆的挠度

$$y(\xi) = u(\xi) (c_1 \sin q(\xi) + c_2 \cos q(\xi)) \quad (12)$$

由两端铰支的边界条件

$$y\left(\frac{a}{l}\right) = 0, y\left(1 + \frac{a}{l}\right) = 0 \quad (13)$$

代入到式(12)中得

$$\begin{aligned} u\left(\frac{a}{l}\right) \left(c_1 \sin q\left(\frac{a}{l}\right) + c_2 \cos q\left(\frac{a}{l}\right) \right) &= 0 \\ u\left(1 + \frac{a}{l}\right) \left(c_1 \sin q\left(1 + \frac{a}{l}\right) + c_2 \cos q\left(1 + \frac{a}{l}\right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

c_1, c_2 不全零, 上式系数矩阵的行列式值为零。

$$\begin{aligned} \text{取第一项计算 } q(\xi) &= \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{k(\xi)} d\xi, k(\xi) = \frac{Pl^2}{EI(\xi)} \\ q(\xi) &= \int_{\xi_0}^{\xi} 2 \sqrt{\frac{aPl^2}{EI_0 \xi l}} d\xi \end{aligned} \quad (15)$$

压杆稳定的临界载荷方程为

$$2 \sqrt{\frac{aP}{EI_0}} (\sqrt{l+a} - \sqrt{a}) = n\pi \quad (16)$$

临界载荷: $P = \frac{\pi^2 EI_0}{4a(\sqrt{l+a} - \sqrt{a})^2}$; $EI_0 = 4.17 \times 10^4 \text{ MPa} \cdot \text{m}^4$, 临界载荷 P_{cr} (kN)。

表1中对比不同的杆长和参数, 本文的方法和有限差分法的结果相差很小, 且计算的工作量小。

表1 临界载荷随参数的变化

a/l	有限差分法 /N	本文的方法 /N	误差 /%
$a=3, l=3$	67.25	66.56	1.02
$a=3, l=4$	41.72	41.03	1.65
$a=4, l=4$	37.53	37.44	2.39
$a=5, l=4$	35.50	35.23	0.76

(2) $n=2$ 时截面形式为四个角钢组成的组合结构 $I(x) = I_0 \left(\frac{x}{a}\right)^2$ ($a \leq x \leq a+l$)

$$q(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\frac{a^2 Pl^2}{EI_0 (\xi l)^2}} d\xi \quad (17)$$

压杆稳定的临界载荷方程为

$$\sqrt{\frac{a^2 P}{EI_0}} \ln \frac{l+a}{a} = n\pi \quad (18)$$

临界载荷: $P = \frac{\pi^2 EI_0}{a^2 \ln^2 \left[\frac{l+a}{a} \right]}$; $EI_0 = 4.17 \times 10^4 \text{ MPa} \cdot \text{m}^4$, 临界载荷 P_{cr} (kN)。

表2中对比不同的杆长 l 和参数 a , 本文的方法和有限差分法的结果很接近, 误差较小, 满足实际的要求。

表2 变截面压杆临界载荷计算和比较

a/l	有限差分法 /N	本文的方法 /N	误差 /%
$a=3, l=3$	95.59	95.08	0.53
$a=3, l=4$	63.26	63.63	0.58
$a=4, l=4$	52.60	53.48	1.67
$a=5, l=4$	47.37	47.60	0.49

(3) $n=4$ 时截面为实心的圆锥 $I(x) = I_0 \left(\frac{x}{a}\right)^4$ ($a \leq x \leq a+l$)

$$q(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\frac{a^4 Pl^2}{EI_0 (\xi l)^4}} d\xi \quad (19)$$

压杆稳定的临界荷载方程为

$$\sqrt{\frac{a^4 P}{EI_0}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right) = n\pi \quad (20)$$

临界荷载: $P = \frac{\pi^2 EI_0}{a^4 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right)^2}$; $EI_0 = 4.17 \times 10^4 \text{ MPa} \cdot \text{m}^4$, 临界荷载 P_{cr} (kN)。

表 3 中对比不同的杆长 l 和参数 a , 本文的方法和有限差分法的结果相差很小, 在误差允许的范围内。

表 3 变截面压杆临界荷载计算和比较

a/l	有限差分法 /N	本文的方法 /N	误差 /%
$a = 3, l = 3$	172.64	182.73	1.02
$a = 3, l = 4$	132.19	139.90	5.83
$a = 4, l = 4$	100.08	102.78	2.67
$a = 5, l = 4$	81.73	83.26	1.87

3 边长线性变化的正方形截面

边长线性变化的正方形变截面压杆如图 2 所示。

始端边长 a_0 , 末端边长 a_l , 令 $\bar{a} = \frac{a_l - a_0}{a_0 L}$, $I_0 = \frac{a_0^4}{12}$, 任意

处截面的惯性矩 $I_x = I_0 (1 + \bar{a}x)^4$ 。

取第一项计算

$$q(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0 (1 + \bar{a}\xi l)^4}} d\xi \quad (21)$$

压杆稳定的临界荷载方程为

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{P}{EI_0}} \left(1 - \frac{1}{1 + \bar{a}l} \right) = n\pi \quad (22)$$

临界荷载: $P = \frac{\pi^2 EI_0 \bar{a}^2}{\left(1 - \frac{1}{1 + \bar{a}l} \right)^2} = \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} \left(\frac{a_l}{a_0} \right)^2$ 。

由临界荷载的公式可知, 杆长为常数时, $\frac{a_l}{a_0}$ 的值越大压杆的临界荷载越大, 对于一定的 $\frac{a_l}{a_0}$, 临界荷载随杆长增加而减小。

4 楔形变截面压杆

楔形变截面压杆如图 3 所示。

截面的厚度 b 不变, 高度 h 随轴线成线性变化边长 $\bar{h} =$

$\frac{h_l - h_0}{h_0 l}$, $I_0 = \frac{bh_0^3}{12}$, 任意处截面的惯性矩 $I_x = I_0 (1 + \bar{h}x)^3$ 。

取第一项计算

$$q(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0 (1 + \bar{h}\xi l)^3}} d\xi \quad (23)$$

压杆稳定的临界荷载方程为

$$\frac{2}{\bar{h}} \sqrt{\frac{P}{EI_0}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{h}l}} \right) = n\pi \quad (24)$$

临界荷载

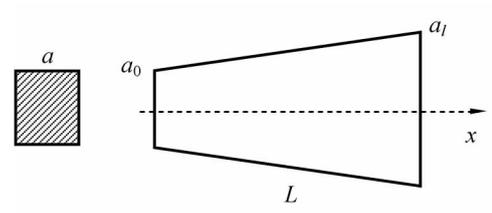


图 2 边长线性变化的的正方形压杆

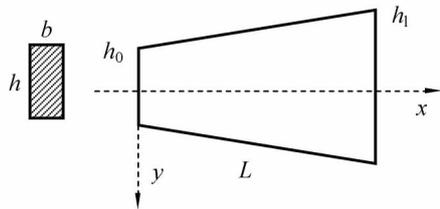


图 3 楔形变截面压杆

$$P = \frac{\pi^2 EI_0 \bar{h}^2}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{h}l}} \right)^2 \quad (25)$$

$\bar{h} = 0$ 时, 式(23)中 $q(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0}} d\xi$, 可得等截面的临界载荷

临界载荷

$$P = \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} \quad (26)$$

$$\text{令 } m = \frac{h_l}{h_0}, P = \frac{\pi EI_0 (m-1)^2}{4l^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}} \right)^2}$$

图 4 中, 随着 m 的增大, 杆件截面高度的变化越快, 临界载荷的值随之增大, 图 5 中, 临界载荷随杆长的增加逐渐减小。

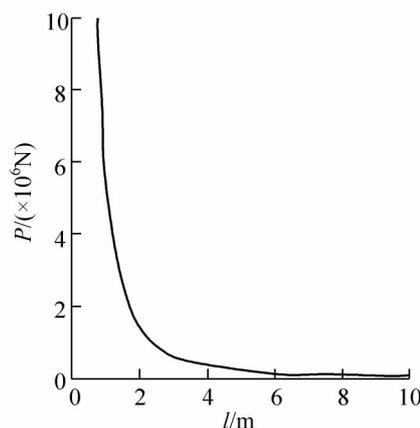
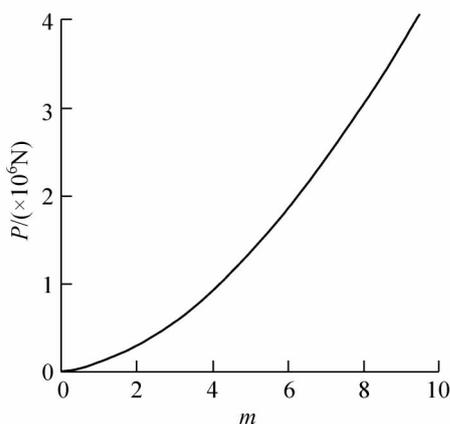


图 4 $l=4$ 时楔形压杆的临界载荷随参数 m 的变化 图 5 $a=2.23$ 时楔形压杆的临界载荷随杆长 l 的变化

5 结论

与有限差分法的结果比较, 本文的计算结果较为精确, 且收敛的速度快, 计算简单, 尤其对于截面变化复杂的压杆, 减少了计算的工作量。有一定的实际工程意义。

参 考 文 献

- [1] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [2] 郭树起, 杨绍普. 一类非等截面杆的纵向自由振动[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2010, 23(2): 59-63.
- [3] 铁摩辛柯. 弹性稳定理论[M]. 张福范, 译. 北京: 科学出版社, 1958.

Calculation of Critical Load of Non-uniform Compressed Rods

Ma Baoping, Guo Shuqi, Feng Zijin

(Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: The governing equation of variable cross-section compressed bar is a differential equation with variable coefficients. There are some exact solutions for very few cases. Using method of modified WBK method, the critical load of some compressed bars are calculated, which are verified by finite difference method.

Key words: variable cross-section; critical load; compressed bar

(责任编辑 车轩玉)