

参数型 Marcinkiewicz 积分交换子的端点估计

左大伟¹, 贾慧英², 王亚宁¹

(1. 石家庄铁道大学 数理系, 河北 石家庄 050043; 2. 石家庄邮电职业技术学院 基础部, 河北 石家庄 050021)

摘要:得到了函数 $b(x) \in BMO, \Omega$ 满足 Dini 条件时参数型 Marcinkiewicz 积分交换子 $\mu_{\Omega, b}^{\rho}(f)(x)$ 的端点估计

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega, b}^{\rho}(f)(x)| > \lambda\}| \leq c \|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} (1 + \log^+ (\frac{|f(x)|}{\lambda})),$$

其中 $\rho > 1$ 且

$$\mu_{\Omega, b}^{\rho}(f)(x) = (\int_0^{\infty} |\frac{1}{t^{\rho}} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)] f(y) dy|^2 \frac{dt}{t})^{\frac{1}{2}}.$$

关键词:参数型 Marcinkiewicz 积分交换子; Dini 条件; 端点估计

中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-0373(2011)01-0105-06

0 引言及主要结果

Hormander 在文献[1]中将高维的参数型 Marcinkiewicz 积分定义如下: $\mu_{\Omega}^{\rho}(f)(x) = (\int_0^{\infty} |F_{\Omega, t}^{\rho}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t})^{\frac{1}{2}}$, 其中, $F_{\Omega, t}^{\rho}(f)(x) = \frac{1}{t^{\rho}} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} f(y) dy$, 并且 $\rho > 0$. 文献[2]给出当 Ω 满足 L^q -Dini 条件 ($q \geq 1$) 时其强 (p, p) 型 ($1 < p < \infty$) 及弱 $(1, 1)$ 型结果. 相应的参数型 Marcinkiewicz 积分交换子定义为 $\mu_{\Omega, b}^{\rho}(f)(x) = (\int_0^{\infty} |F_{b, t}^{\rho}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t})^{\frac{1}{2}}$, 其中, $F_{b, t}^{\rho}(f)(x) = \frac{1}{t^{\rho}} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)] f(y) dy$, 当 $\rho = 1$ 时即为 Marcinkiewicz 积分交换子.

称 Ω 满足 Dini 型条件, 如果

$$\int_0^1 \frac{\omega(\rho)}{\rho} \log \frac{1}{\rho} d\rho < \infty \quad (1)$$

式中, $\omega(\rho) = \sup\{| \Omega(x) - \Omega(y) | : |x - y| < \rho, x, y \in S^{n-1}\}$.

考虑 $b(x) \in BMO$, 且 Ω 满足 Dini 型条件时, 参数型 Marcinkiewicz 积分交换子的 $L \log L$ 型端点估计. 主要结果叙述如下.

定理 1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上零次齐次函数, $\int_{S^{n-1}} \Omega(x) dx = 0$, 满足 Dini 型条件(1), $b(x) \in BMO$. 则存在正常数 c 使得对每个具紧支集的光滑函数 f 及所有 $\lambda > 0$, $|\{y \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega, b}^{\rho}(f)(x)| > \lambda\}| \leq c \|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} (1 + \log^+ (\frac{|f(x)|}{\lambda})) dx$.

注 1: 文献[3], 文献[4]给出了参数型 Marcinkiewicz 积分的 L^2 及 Hardy 空间上的有界性.

注 2: 文献[5]给出了有界核条件下参数型 Marcinkiewicz 积分的 L^p ($1 < p < \infty$) 有界性.

注 3: 文献[6]给出了参数型 Marcinkiewicz 积分弱 Hardy 空间到弱 L^1 空间的有界性.

为证明定理 1 先介绍一些记号.

以 $M_{\delta}, M_{\delta}^{\#}$ 分别表示 δ 阶 Hardy-Littlewood 极大算子和 δ 阶 sharp 函数, 它们分别定义为

收稿日期: 2010-04-23

作者简介: 左大伟 男 1976 年出生 讲师

$$M_\delta = \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^\delta dy \right)^{\frac{1}{\delta}}, \delta > 0 \quad (2)$$

$$M_\delta^\# = \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|^\delta dy \right)^{\frac{1}{\delta}}, \delta > 0 \quad (3)$$

式中, $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy$; 当 $\delta = 1$ 时, $M_1, M_1^\#$ 分别为 Hardy-Littlewood 极大函数和 Sharp 极大函数。并记 $M^2(f)(x) = M(Mf)(x)$ 。

称函数 $A: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 为 Young 函数, 如果 A 是连续递增的凸函数, 且满足 $A(0) = 0, A(t) \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$ 。 A 的 Young 补函数 $\bar{A}$ 定义为

$$\bar{A}(s) = \sup_{0 \leq t \leq \infty} [st - A(t)], 0 \leq s \leq \infty \quad (4)$$

易知, 函数 $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$ 是一个 Young 函数, 其 Young 补函数 $\bar{\Phi}(t) = e^t$ 。设函数 f 在方体 Q 上有定义, 它的 Luxemburg 范数定义为^[7] $\|f\|_{A,Q} = \inf(\lambda > 0: \frac{1}{|Q|} \int_Q A(\frac{|f(y)|}{\lambda}) dy \leq 1)$ 。

对于 Luxemburg 范数相应的极大函数定义为 $M_A(f)(x) = \sup_{x \in Q} \|f\|_{A,Q}$, 并有下面的广义 Holder 不等式成立

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)g(y) dy \leq \|f\|_{A,Q} \|g\|_{\bar{A},Q} \quad (5)$$

方便起见, 采用向量值奇异积分观点, 用 $\mathcal{H}$ 表示 Hilbert 空间

$$\mathcal{H} = \{h: \|h\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^\infty \frac{|h(t)|^2}{t^{2p+1}} dt \right)^{1/2} < \infty\} \quad (6)$$

则 $\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(x) = \|F_{b,t}^\rho(x)\|_{\mathcal{H}}$, 其中, $F_{b,t}^\rho(x) = \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)] f(y) dy$ 。

1 定理证明

引理 1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上零次齐次函数, $\int_{S^{n-1}} \Omega(x) dx = 0$, 满足 Dini 型条件(1), $b(x) \in BMO, 0 < \delta < \epsilon < 1$ 。则存在正常数 $c = c_{\delta,\epsilon}$ 使得

$$M_\delta^\#(\mu_{\Omega,b}^\rho(f))(x) \leq c \|b\|_{BMO} (M^2(f)(x) + M_\epsilon(\mu_\Omega^\rho(f))(x)) \quad (7)$$

证明: 给定 $x \in \mathbb{R}^n$, 用 $Q = Q(x_0, l)$ 表示中心在 x_0 , 边长为 l 且各边分别平行于坐标轴的方体, 记 $Q^* = Q(x_0, 4\sqrt{n}l)$ 。把 f 分解为 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 其中 $f_1(x) = f \chi_{Q^*}$, 注意到

$$b(y)F_t^\rho(f)(y) - F_t^\rho(bf)(y) = (b(y) - b_{Q^*})F_t^\rho(f)(y) - F_t^\rho((b - b_{Q^*})f_1)(y) - F_t^\rho((b - b_{Q^*})f_2)(y)。$$

类似于文献[8]的方法

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(z) - (\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(z))_Q|^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \\ & \left(\frac{2}{|Q|} \int_Q |\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(z) - \mu_\Omega^\rho((b - b_{Q^*})f_2))(x_0)|^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \\ & \left(\frac{2}{|Q|} \int_Q \|(b(z) - b_Q)F_t^\rho(f)(z)\|_H^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{2}{|Q|} \int_Q \|F_t^\rho((b - b_Q)f_1)(z)\|_H^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} + \\ & \left(\frac{2}{|Q|} \int_Q \|F_t^\rho((b - b_{Q^*})f_2)(z) - F_t^\rho((b - b_{Q^*})f_2)(x_0)\|_H^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} = \text{I} + \text{II} + \text{III}。 \end{aligned}$$

下面分别估计 I, II 和 III。

以 r, r' 为指数, 应用 Holder 不等式, 其中, $1 < r < \epsilon/\delta$

$$\text{I} \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q \|(b(z) - b_Q)F_t^\rho(f)(z)\|_{\mathcal{H}} dz = \frac{c}{|Q|} \int_Q |b(z) - b_Q| \|F_t^\rho(f)(z)\|_{\mathcal{H}} dz \leq$$

$$c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(z) - b_Q|^{r\delta} dz \right)^{1/r\delta} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \|F_t^p(f)(z)\|_{\mathcal{H}}^{r\delta} dz \right)^{1/r\delta} \leq c \|b\|_{BMO} M_\epsilon(\mu_\Omega^p(f))(x) \quad (8)$$

由 Marcinkiewicz 积分的弱(1,1) 性, 应用 Kolmogorov^[6] 不等式

$$\mathbb{I} \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q |(b - b_Q)f_1(z)| dz \leq c \|b - b_Q\|_{\exp L, Q} \|f\|_{L \log L, Q} \leq c \|b\|_{BMO} M_{L \log L} f(x) \quad (9)$$

为估计 III, 记 $V = \|F_t^p((b - b_{Q^*})f_2)(z) - F_t^p((b - b_{Q^*})f_2)(x_0)\|_{\mathcal{H}}$, 易知 V 不会超过 $V_1 + V_2 + V_3$,

$$\text{其中, } V_1 = \left(\int_0^\infty \left[\int_{\{|z-y| \leq t, |x_0-y| > t\}} \frac{|\Omega(z-y)|}{|z-y|^{n-\rho}} |(b - b_{Q^*})f_2(y)| dy \right]^2 \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}}; V_2 = \left(\int_0^\infty \left[\int_{\{|z-y| \leq t, |x_0-y| \leq t\}} \frac{|\Omega(x_0-y)|}{|x_0-y|^{n-\rho}} |(b - b_{Q^*})f_2(y)| dy \right]^2 \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}}; V_3 = \left(\int_0^\infty \left[\int_{\{|z-y| \leq t, |x_0-y| > t\}} \frac{|\Omega(z-y)|}{|z-y|^{n-\rho}} - \frac{|\Omega(x_0-y)|}{|x_0-y|^{n-\rho}} |(b - b_{Q^*})f_2(y)| dy \right]^2 \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因 V_1 与 V_2 类似, 故仅估计 V_1 . 因 $x_0, x, z \in Q, y \in R^n - Q^*$ 时有 $|x_0 - y| \sim |x - y| \sim |z - y|$, 并应用广义 Minkevski 不等式得

$$\begin{aligned} V_1 &\leq c \int_{R^n \setminus Q^*} \frac{|(b(y) - b_{Q^*})f_2(y)|}{|z - y|^{n-\rho}} \left(\int_{|z-y| \leq t < |x_0-y|} \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}} dy \leq \\ &c \int_{R^n \setminus Q^*} \frac{|(b(y) - b_{Q^*})f(y)|}{|z - y|^{n-\rho}} \left| \frac{1}{|z - x_0|^{2\rho}} - \frac{1}{|z - y|^{2\rho}} \right| dy \leq \\ &c |Q|^{\frac{1}{2n}} \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{k+1}Q^* - 2^kQ^*} \frac{|(b(y) - b_{Q^*})f(y)|}{|z - y|^{n+\frac{1}{2}}} dy \leq \\ &c \sum_{k=1}^\infty 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{|2^{k+1}Q^*|} \int_{2^{k+1}Q^*} |(b(y) - b_{Q^*})f(y)| dy \leq \\ &c \sum_{k=1}^\infty k 2^{-\frac{k}{2}} \|b - b_{Q^*}\|_{\exp L, Q^*} \|f\|_{L \log L, Q^*} \leq \\ &c \|b - b_{Q^*}\|_{\exp L, Q^*} \|f\|_{L \log L, Q^*} \leq \\ &c \|b\|_{BMO} M_{L \log L}(f)(x) \end{aligned} \quad (10)$$

应用广义 Minkevski 不等式估计 V_3 得

$$\begin{aligned} V_3 &\leq c \int_{R^n \setminus Q^*} \left| \frac{|\Omega(z-y)|}{|z-y|^{n-\rho}} - \frac{|\Omega(x_0-y)|}{|x_0-y|^{n-\rho}} \right| |(b(y) - b_{Q^*})f(y)| \left(\int_{|z-y| < t} \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}} dy \leq \\ &c \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{k+1}Q^* \setminus 2^kQ^*} |(b(y) - b_{Q^*})f(y)| \left| \frac{|\Omega(z-y) - \Omega(x_0-y)|}{|z-y|^n} \right| dy + \\ &c \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{k+1}Q^* \setminus 2^kQ^*} |(b(y) - b_{Q^*})f(y)| \left| \frac{|\Omega(x_0-y)|}{|x_0-y|^\rho} \right| \left| \frac{1}{|z-y|^{n-\rho}} - \frac{1}{|x_0-y|^{n-\rho}} \right| dy = V_{31} + V_{32} \end{aligned} \quad (11)$$

而

$$\begin{aligned} V_{31} &\leq c \sum_{k=1}^\infty \omega(2^{2-k}) \int_{2^{k+1}Q^* - 2^kQ^*} |(b(y) - b_{Q^*})f(y)| \frac{1}{|z-y|^n} dy \leq \\ &c \sum_{k=1}^\infty \omega(2^{2-k}) \frac{1}{|2^{k+1}Q^*|} \int_{2^{k+1}Q^*} |(b(y) - b_{Q^*})f(y)| dy \leq \\ &c \|b - b_Q\|_{\exp L, Q} \|f\|_{L \log L, Q} \sum_{k=1}^\infty ((k+1)\omega(w^{2-k})) \leq \\ &c \|b\|_{BMO} M_{L \log L}(f)(x) \end{aligned} \quad (12)$$

因 $x_0, x, z \in Q, y \in R^n - Q^*$ 时有 $|x_0 - y| \sim |x - y| \sim |z - y|$

$$V_{32} \leq c \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q^*|} \int_{2^{k+1}Q^*} |(b(y) - b_{Q^*})f(y)| dy \leq c \|b\|_{BMO} M_{L \log L}(f)(x) \quad (13)$$

引理 2^[7] 设 $M = M^d$ 为二进 Hardy-Littlewood 极大函数, 则存在正常数 c 使得 good- λ 不等式

$$|\{y \in R^n : M(f)(y) > \lambda, M^\# f(y) \leq \lambda\}| \leq c\epsilon |\{y \in R^n : Mf(y) > \frac{\lambda}{2}\}| \quad (14)$$

对所有的 $\lambda, \epsilon > 0$ 成立。做为推论有下面的结果: 令 $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 为双 Young 函数, 则存在正常数 c 使得

$$\sup_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) |\{y \in R^n : M_\delta f(y) > \lambda\}| \leq c \sup_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) |\{y \in R^n : M_\delta^\# f(y) > \lambda\}| \quad (15)$$

对所有满足右侧不等式有界的 f 成立。

引理 3 设 $0 < \delta < 1$; Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上零次齐次函数, $\int_{S^{n-1}} \Omega(x) dx = 0$, 满足 Dini 型条件(1), 则存在不依赖于 f 和 x 的常数 c 使得

$$M_\delta^\#(\mu_\Omega^\rho(f)(y)) \leq cM(f)(y) \quad (16)$$

对所有的 $y \in R^n$ 成立。

证明: 给定 $x \in R^n$, 令 $Q = Q(x_0, l)$ 为以 x_0 为心 l 为半径边平行于坐标轴的方位。定义 $Q^* = Q(x_0, 4\sqrt{nh})$ 。令 $f_1 = f \chi_{Q^*}$, $f_2 = f - f_1$ 。则对所有的 $z \in Q$

$$|\mu_\Omega^\rho(f)(z) - \mu_\Omega^\rho(f_2)(x_0)| \leq \|F_t^\rho(f)(z) - F_t^\rho(f_2)(x_0)\|_{\mathcal{H}} \leq \mu_\Omega^\rho(f_1)(z) + \|F_t^\rho(f_2)(z) - F_t^\rho(f_2)(x_0)\| \quad (17)$$

由 Kolmogorov 不等式及 $\mu_\Omega^\rho(f)$ 弱(1,1) 型得

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\mu(f_1)(z)|^\delta dz\right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \frac{c}{|Q|} \int_{Q^*} |f_1|(z) dz \leq cM(f)(z),$$

另一方面, 利用 Holder 不等式

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \|F_t^\rho(f_2)(z) - F_t^\rho(f_2)(x_0)\|_{\mathcal{H}}^\delta dz\right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \|F_t^\rho(f_2)(z) - F_t^\rho(f_2)(x_0)\|_{\mathcal{H}} dz.$$

类似于引理 1 中 V 的证明有 $\|F_t^\rho(f_2)(z) - F_t^\rho(f_2)(x_0)\|_{\mathcal{H}} \leq cMf(x)$ 。因此

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \|\mu_\Omega^\rho(f)(z) - \mu_\Omega^\rho(f)(x_0)\|_{\mathcal{H}}^\delta dz\right)^{\frac{1}{\delta}} \leq cMf(x).$$

引理 4 设 $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$, 则存在正常数 c 使得对任意具有紧支集的光滑函数 f

$$\sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : \mu_{\Omega,b}^\rho(f)(y) > t\}| \leq c \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : M^2(f)(y) > t\}|.$$

证明: 设 f 为具有紧支集的光滑函数, 需要证明:

$$\sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : |\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(y)| > t\}| \leq c \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : M^2(f)(y) > t\}|.$$

根据 Holder 不等式用下式代替上式的右侧。对 $\delta > 0$, $L_{\Phi,\delta}(f) = L_\delta(f)$ 定义为

$$L_\delta(f) = \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : M_\delta(\mu_{\Omega,b}^\rho(f))(y) > t\}|.$$

称 $\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(x)$ 满足下面不等式, 对任意的 $0 < \delta < 1, \epsilon > 0$

$$L_\delta(f) \leq c\epsilon L_\delta(f) + c(\epsilon) \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : M^2 f(y) > t\}|.$$

为此应用引理 2, 对 $t > 0, \delta > 0$,

$$\begin{aligned} |\{y \in R^n : M_\delta(\mu_{\Omega,b}^\rho(f))(y) > t\}| &= |\{y \in R^n : M(|\mu_{\Omega,b}^\rho(f)|^\delta(y)) > t^\delta\}| \leq \\ &c_n \epsilon |\{y \in R^n : M(|\mu_{\Omega,b}^\rho(f)|^\delta(y)) > \frac{t^\delta}{2}\}| + \\ &|\{y \in R^n : M^\#(|\mu_{\Omega,b}^\rho(f)|^\delta(y)) > \epsilon t^\delta\}| = \text{I} + \text{II} \end{aligned} \quad (18)$$

为了估计 II 应用引理 I, 取 $\epsilon = r\delta, 1 < r < \frac{1}{\delta}$,

$$\begin{aligned} \text{II} &= |\{y \in R^n : M_\delta^\#(\mu_{\Omega,b}^\rho(f))(y) > \epsilon^{\frac{1}{\delta}} t\}| \leq \\ &|\{y \in R^n : M_\delta(\mu_\Omega^\rho(f)) + M^2 f > \frac{\epsilon^{\frac{1}{\delta}} t}{2c \|b\|_{BMO}}\}| \leq \\ &|\{y \in R^n : M_\delta(\mu_\Omega^\rho(f)) > \frac{\epsilon^{\frac{1}{\delta}} t}{2c \|b\|_{BMO}}\}| + |\{y \in R^n : M^2 f > \frac{\epsilon^{\frac{1}{\delta}} t}{2c \|b\|_{BMO}}\}| \end{aligned} \quad (19)$$

取 $a = \frac{\epsilon^{\frac{1}{\delta}}}{2c \|b\|_{BMO}}$, 则有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : M_\delta(\mu_{\Omega,b}^\rho(f))(y) > t\}| \leq \\ &\frac{c\epsilon}{\Phi(\frac{2^{1/\delta}}{t})} |\{y \in R^n : M_\delta(\mu_{\Omega,b}^\rho(f))(y) > \frac{t}{2^{1/\delta}}\}| + \\ &\frac{c \|b\|_{BMO}}{\Phi(\frac{1}{at})} |\{y \in R^n : M_{r\delta}(\mu_\Omega^\rho(f))(y) > at\}| + \frac{c \|b\|_{BMO}}{\Phi(\frac{1}{at})} |\{y \in R^n : M^2 f(y) > at\}| \leq \\ &c\epsilon L_\delta(f) + c \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(at)} |\{y \in R^n : M^2 f(y) > at\}| + \\ &c \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(at)} |\{y \in R^n : M_{r\delta}(\mu_\Omega^\rho(f))(y) > at\}| \end{aligned} \quad (20)$$

由 $0 < r\delta < 1$ 利用引理 3 及引理 2 的第一部分得

$$\begin{aligned} L_\delta(f) &\leq c\epsilon L_\delta(f) + c \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} |\{y \in R^n : M_\delta^\#(\mu_\Omega^\rho(f))(y) > t\}| + \\ &c \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} |\{y \in R^n : M^2 f(y) > t\}| \leq \\ &c\epsilon L_\delta(f) + c \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} |\{y \in R^n : M^2 f(y) > t\}| \end{aligned} \quad (21)$$

下面只需证明 $L_\delta(f)$ 有界, 再取 $\epsilon < 1/c$ 便可以得到所需结果。

对每个 $m = 1, 2, 3, \dots$, 令 $b_m = \inf\{b, m\}$ 。因此 $\|b_m\|_{BMO} \leq \|b\|_{BMO}$, 其中 c 不依赖于 m , 将证明用 b_m 代替 b 之后 $L_{\Phi,\delta,b}$ 是有限的, 再令 $m \rightarrow \infty$ 即可。

由 f 具有紧支集, 因此假设 $\text{supp} f \subset B(0, h)$ 对某个 $h > 0$, 由 $\|b_m\|_{L^\infty} \leq m$, 对 $|x| > 2h$

$$\begin{aligned} |\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(x)| &= \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{1/2} \\ &\int_{R^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)] f(y) dy \left(\int_{|x-y| \leq t} \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{1/2} = \frac{2cm}{h^n} \int_B f(y) dy = cMf(x) \end{aligned} \quad (22)$$

利用此式及 $0 < \delta < 1$, 对 $t > 0$ 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(1/t)} |\{x \in R^n : M_\delta^\#(\mu_{\Omega,b}^\rho(f))(x) > t\}| &\leq cB(0, 2R) \|b\|_{BMO} \left(\frac{1}{B(0, R)} \int_{B(0, R)} |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} + \\ &c \int_{B(0, R)} \Phi(f)(y) dy \end{aligned} \quad (23)$$

根据 M 的弱 $(1, 1)$ 型及 f 为具有紧支集的光滑函数知最后一项是有界的。

引理 5^[7] 存在正常数 C 使得对任意局部可积函数 f 及所有 $\lambda > 0$,

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : M^2 f(y) > \lambda\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} (1 + \log^+ \frac{|f(y)|}{\lambda}) dy.$$

定理 1 的证明 不妨设 $\lambda = 1$, f 具有紧支集, 由引理 4 与引理 5 得

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : \mu_{\Omega,b}^\rho f(y) > 1\}| \leq \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} |\{y \in \mathbb{R}^n : \mu_{\Omega,b}^\rho f(y) > t\}| \leq$$

$$C \|b\|_{BMO} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} |\{y \in \mathbb{R}^n : M^2 f(y) > t\}| \leq$$

$$C \|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| (1 + \log^+ |f(y)|) dy.$$

参 考 文 献

- [1] Hormander L. Translation invariant operators[J]. Acta Math., 1960, 104:93-139.
- [2] Cheng Meifang, Shu Lisheng. Boundedness of the parametric Marcinkiewicz integral on space L^p [J]. Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly, 2005, 22:134-142.
- [3] 伍火熊. 积域上一类相关于块空间的参数型 Marcinkiewicz 积分的 L^2 有界性[J]. 北京师范大学学报:自然科学版, 2003, 39:147-152.
- [4] 陈永, 束立升. Hardy 空间上参数型 Marcinkiewicz 积分. 安徽师范大学学报, 2004, 3:261-264.
- [5] 程美芳, 束立升. 参数型 Marcinkiewicz 积分算子在 L^p 空间上的有界性[J]. 南京大学学报, 2005, 22:134-142.
- [6] Zhang Songyan, Zhou Genjiao, Tao Xiangxing. On boundedness of the high order commutators of Marcinkiewicz integrals on weak Hardy spaces of atom type[J]. Pure and Applied Mathematics, 2010, 26(1):42-50.
- [7] Perez C. Endpoint Estimates for commutators of singular integral operators[J]. Journal of functions analysis, 1999, 128:163-185.
- [8] Ding Young, Lu Shanzhen, Zhang Pu. Weighted weak type estimates for commutators of the Marcinkiewicz integrals[J]. Science in China Ser. A Mathematics, 2004, 47:83-95.

Endpoint Estimates for Commutators of the Parametric Marcinkiewicz Integral

Zuo Dawei¹, Jia Huixian², Wang Yaning¹

(1. Department of Applied Mathematics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;

2. Department of Basic course, Shijiazhuang Post & Telecommunication College, Shijiazhuang 050021, China)

Abstract: For the commutators of the parametric Marcinkiewicz integral, we show that the following inequality holds

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(x)| > \lambda\}| \leq c \|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} (1 + \log^+ (\frac{|f(x)|}{\lambda})) dy,$$

where

$$\mu_{\Omega,b}^\rho(f)(x) = (\int_0^\infty |\frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)] f(y) dy|^2 \frac{dt}{t})^{\frac{1}{2}}.$$

Key words: commutators of the parametric Marcinkiewicz integral; Dini type condition; endpoint estimates