

考虑剪滞剪切效应的 复合材料薄壁箱型连续梁理论分析

韩 博, 吴亚平

(兰州交通大学 土木工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:以含三次项的四次抛物线作为箱梁翼缘板的纵向位移函数, 推导出了考虑横向剪切变形及剪力滞后效应时的双轴对称铺设的复合材料层合箱梁在对称弯曲条件下的控制微分方程, 并推导出了两等跨连续梁分别在跨中受一集中力 P 的位移差函数, 最后结合具体的复合材料箱型连续梁实例, 将本文理论推导的结果与 ANSYS 结果以及实验结果进行了对比, 结果表明, 理论推导的结果与 ANSYS 结果和实验结果吻合较好, 其结果是正确可靠的。

关键词:复合材料箱型连续梁; 剪力滞效应; 应力; 剪力滞系数; ANSYS

中图分类号: TB332 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-0373(2011)01-0026-05

0 引言

复合材料层合薄壁箱梁, 其截面自重轻, 并具有良好的空间整体受力性能; 连续梁桥具有受力合理、结构刚度大、行车平顺、抗震性能好、经济等优点, 这类桥梁在我国大中跨径桥梁中应用也越来越普遍^[1]。在目前的复合材料层合薄壁箱梁研究中, 研究多常见于对简支梁的研究和有限元分析, 而对复合材料薄壁箱型连续梁的研究却比较少, 因此, 复合材料层合薄壁箱型连续梁理论的研究是一个非常有意义的课题。

1 基本假定及其控制方程

对于如图 1 所示的双轴对称铺设^[2], 即在翼、腹板上的铺设角及偏轴刚度分别满足: $\theta(z) = \theta(-z)$, $\bar{Q}_{ij}(z) = \bar{Q}_{ij}(-z)$ 及 $\theta(y) = \theta(-y)$, $\bar{Q}_{ij}(y) = \bar{Q}_{ij}(-y)$ 的层合箱梁, 在对称弯曲条件下设其中面 (y 轴) 的轴向位移, 竖向位移, 转角分别为 $u = u(x)$, $W = W(x)$, $\psi = \psi(x)$, 翼板上由剪力滞后效应所引起的纵向位移差函数为: $\xi = \xi(x)$ 。本文假设截面上任一点的轴向位移为

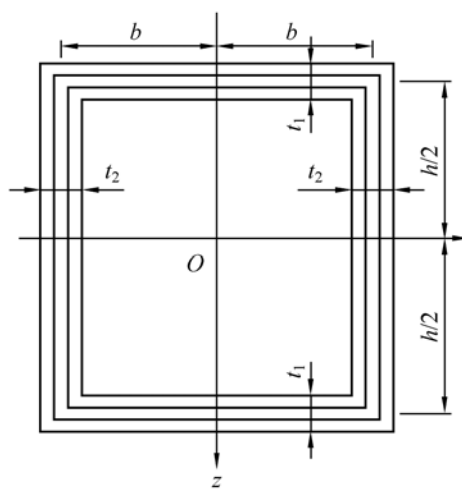


图1 层合箱梁示意图

$$U(x, y, z) = u(x) - z \left[\psi(x) + \left(1 - \frac{4y^3}{b^3} + \frac{3y^4}{b^4} \right) \xi(x) \right] \quad (1)$$

以文献[2]为基础, 推导出如图 1 所示的双轴对称铺设的复合材料薄壁层合箱梁的控制方程

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - k^2 \xi &= \frac{21n}{17D_{11}} \left(Q + \frac{5D_{16}^s}{3bD_{11}^s} M \right) \\ n &= \frac{1}{1 - \frac{63D_{11}^s}{85D_{11}}}, k = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{48nD_{66}^s}{17D_{11}^s} \left[1 - \frac{35(D_{16}^s)^2}{48D_{11}D_{66}^s} \right]} \\ \left[\xi' + \frac{21nD_{16}^s}{17bD_{11}} \left(1 - \frac{85D_{11}}{102D_{11}^s} \right) \xi - \frac{21nM}{17D_{11}} \right] \Big|_{x_1}^{x_2} \delta \xi &= 0 \\ W(x) &= W_b(x) + W_s(x) \\ W_b(x) &= - \iint \left[\frac{M(x)}{D_{11}} + \frac{3D_{11}^s}{5D_{11}} \xi'(x) - \frac{D_{16}^s}{bD_{11}} \xi(x) \right] dx dx + C_3 x + C_4 \\ W_s(x) &= \frac{\alpha}{A_{66}^b} \left[1 - \frac{\alpha(A_{16}^b)^2}{\alpha(A_{16}^b)^2 - A_{11}A_{66}^b} \right] \cdot [M(x) - M(\text{支})] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, $D_{11} = \sum_{i=1}^{2n} (\bar{Q}_{11})_i I_i + \sum_{j=1}^{2m} (\bar{Q}_{11})_j I_j$; $A_{11} = \sum_{i=1}^{2n} (\bar{Q}_{11})_i A_i + \sum_{j=1}^{2m} (\bar{Q}_{11})_j A_j$ 分别为全截面的弯曲刚度及拉压刚度; $[D_{11}^s; D_{66}^s; D_{16}^s] = [\sum_{i=1}^{2n} (\bar{Q}_{11})_i I_i; \sum_{i=1}^{2n} (\bar{Q}_{66})_i I_i; \sum_{i=1}^{2n} (\bar{Q}_{16})_i I_i]$ 均为上下翼板的弯曲刚度; $[A_{66}^b; A_{66}^b] = [\sum_{i=1}^{2m} (\bar{Q}_{66})_j A_j; \sum_{j=1}^{2m} (\bar{Q}_{16})_j A_j]$ 均为左右腹板的面内剪切刚度; $I_i = \frac{1}{6} b t_i^3 + z_i^2 A_i$, $A_i = 2b t_i$, t_i 及 $I_j = \frac{1}{12} t_j h^3$, $A_j = h t_j$, t_j 分别为翼板第 i 铺层及腹板第 j 铺层的对 y 轴惯性矩, 截面面积, 铺层厚度; $M = M(x)$, $Q = Q(x)$ 分别为弯矩和剪力, $W_b(x)$, $W_s(x)$, $M(\text{支})$ 为支座处的弯矩值, $W(x)$ 分别为考虑剪滞效应对总挠度的贡献及考虑剪切变形对总挠度的贡献和总挠度, 其中 C_3, C_4 由 $W_b(x)$ 的边界条件定出; m, n 分别为翼板和腹板的铺层层数, α 为左右腹板的竖向剪切系数, 考虑到剪应变在腹板上近似均匀分布, 一般可近似取 $\alpha = 1$, 也可采用以下公式^[3]

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_{11}^s}{D_{11}} \right) \quad (3)$$

于是由上式构成了 $\xi = \xi(x)$ 的定解问题, 上述微分方程解的一般形式可写为

$$\xi(x) = \frac{21n}{17D_{11}} [C_1 \text{sh } kx + C_2 \text{ch } kx] + \xi^* \quad (4)$$

式中, ξ^* 为 $Q(x)$ 及 $M(x)$ 有关的特解, 积分常数 C_1, C_2 由边界条件定出。

同理可根据文献[2]所述方法推导可得其第 i 层翼板正应力和剪力滞系数

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_i &= \frac{(\bar{Q}_{11})_i \alpha A_{16}^b Q}{\alpha (A_{16}^b)^2 - A_{11} A_{66}^b} + (\bar{Q}_{11})_i z_i \left\{ \frac{M}{D_{11}} - \left(1 - \frac{4y^3}{b^3} + \frac{3y^4}{b^4} - \frac{3D_{11}^s}{5D_{11}} \right) \xi' + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{12(\bar{Q}_{16})_i}{(\bar{Q}_{11})_i} \left(\frac{y^2}{b^3} - \frac{y^3}{b^4} \right) - \frac{D_{16}^s}{bD_{11}} \right] \xi \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)中的第一大项为剪切效应影响项, 第二大项中的后两项为剪滞效应影响项。

用剪力滞系数表示为

$$(\sigma_s)_i = \frac{(\bar{Q}_{11})_i \alpha A_{16}^b Q}{\alpha (A_{16}^b)^2 - A_{11} A_{66}^b} + \frac{(\bar{Q}_{11})_i z_i M}{D_{11}} \lambda \quad (6)$$

$$\lambda = \lambda(x, y) = 1 - \frac{D_{11}}{M} \left\{ \left(1 - \frac{4y^3}{b^3} + \frac{3y^4}{b^4} - \frac{3D_{11}^s}{5D_{11}} \right) \xi' - \left[\frac{12(\bar{Q}_{16})_i}{(\bar{Q}_{11})_i} \left(\frac{y^2}{b^3} - \frac{y^3}{b^4} \right) - \frac{D_{16}^s}{bD_{11}} \right] \xi \right\} \quad (7)$$

2 两等跨连续梁分别在跨中受一集中力 P 作用下位移差函数推导

由于对称布置, 故只选择 $A-B$ 段分析:

由结构力学解图 2 的超静定问题可得其的弯矩与剪力方程为分段函数

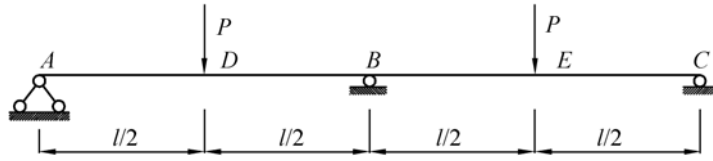


图 2 等跨连续梁示意图

$$\left. \begin{aligned} M_1(x) &= \frac{5}{16}Px \\ Q_1 &= \frac{5}{16}P \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} M_2(x) &= \frac{1}{2}Pl - \frac{11}{16}Px \\ Q_2 &= -\frac{11}{16}P \end{aligned} \right\} \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (9)$$

剪力滞差值函数的微分方程为

$$\begin{aligned} \xi_1'' - k^2\xi_1 &= \frac{21nP}{17D_{11}} \left[\frac{5}{16} + \frac{5D_{16}^s}{3bD_{11}^s} \cdot \frac{5x}{16} \right], 0 \leq x \leq \frac{l}{2}; \\ \xi_2'' - k^2\xi_2 &= \frac{21nP}{17D_{11}} \left[-\frac{11}{16} + \frac{5D_{16}^s}{3bD_{11}^s} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{11x}{16} \right) \right], \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{aligned}$$

上式的通解为

$$\xi_1(x) = BP \left[c_1 \operatorname{sh} kx + c_2 \operatorname{ch} kx - \frac{5}{16k^2} - \frac{25x}{48} kT_1 \right] \quad (10)$$

$$\xi_2(x) = BP \left[c_3 \operatorname{sh} kx + c_4 \operatorname{ch} kx + \frac{11}{16k^2} - \left(\frac{5l}{6} - \frac{55x}{48} \right) kT_1 \right] \quad (11)$$

式中, $T_1 = \frac{D_{16}^s}{bk^3 D_{11}^s}$ 。边界条件为^[4]

$$\left. \begin{aligned} &\left[\xi_1' + \frac{21nD_{16}^s}{17bD_{11}} \left(1 - \frac{85D_{11}}{102D_{11}^s} \right) \xi_1 - \frac{21nM_1}{17D_{11}} \right] \Big|_{\frac{l}{2}} + \left[\xi_2' + \frac{21nD_{16}^s}{17bD_{11}} \left(1 - \frac{85D_{11}}{102D_{11}^s} \right) \xi_2 - \frac{21nM_2}{17D_{11}} \right] \Big|_{\frac{l}{2}} = 0 \\ &\xi_1' \Big|_{x=0} = 0 \\ &\xi_2 \Big|_{x=l} = 0 \\ &\xi_1 \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \xi_2 \Big|_{x=\frac{l}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将(8) ~ (11) 代入(12) 可以解得:

$$c_1 = \frac{25}{48}T_1 \quad (13)$$

$$c_2 = -\frac{5T_1}{48} \left(5\operatorname{th} kl + \frac{3kl - 16\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{\operatorname{ch} kl} \right) + \frac{16\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 11}{16k^2 \operatorname{ch} kl} \quad (14)$$

$$c_3 = \frac{5T_1}{48} \left(5 - 16\operatorname{ch} \frac{kl}{2} \right) + \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{k^2} \quad (15)$$

$$c_4 = -\frac{5T_1}{48} \left(5\operatorname{th} kl + \frac{3kl - 16\operatorname{sh} kl \cdot \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}{\operatorname{ch} kl} \right) - \frac{11 + 16\operatorname{sh} kl \cdot \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{16k^2 \operatorname{ch} kl} \quad (16)$$

3 算例分析

已知长为 $2 \times L = 360$ mm 的碳纤维两等跨箱型连续梁^[5], 分别在跨中作用力 P , 其截面几何尺寸如图 1 所示, 双轴对称铺设, 铺层结构为 $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]$ 箱梁截面参数为: $t_1 = t_2 = 1.1$ mm, $h = 20$ mm, $2b = 31.5$ mm; 其复合材料碳纤维的单层工程常数为: 沿 1 轴 $E_1 = 76.508$ GPa, 沿 2 轴 $E_2 = 7.365$ GPa; $V_{12} = 0.13$; $G_{12} = 3.8$ GPa。

计算公式用到的是偏轴常数, 需用转换公式转换^[6], 转换后的单向碳纤维复合材料的偏轴刚度为: $0^\circ: \bar{Q}_{11} = 76.633$ GPa, $\bar{Q}_{66} = 3.8$ GPa, $\bar{Q}_{16} = 0$; $\pm 45^\circ: \bar{Q}_{11} = 25.282$ GPa, $\bar{Q}_{66} = 20.523$ GPa, $\bar{Q}_{16} = \pm 24.363$ GPa。对于此例显然有 $A_{16}^b = 0$, 由上述数据可得其截面参数: $D_{11} = 424.546 \times 10^6$ N · mm²; $D_{11}^s = 352.373 \times 10^6$ N · mm²; $D_{66} = 84.320 \times 10^6$ N · mm²; $D_{16}^s = 2.3215 \times 10^6$ N · mm²; $A_{66}^b = 0.5351 \times 10^6$ N; $\alpha = 1.087$ 。

图 3 ~ 图 5 给出了两等跨连续梁在各个工况下的跨中剪力滞系数分布曲线图。图 6 给出了两等跨连续梁在各个工况下的跨中翼缘板正应力分布曲线图。

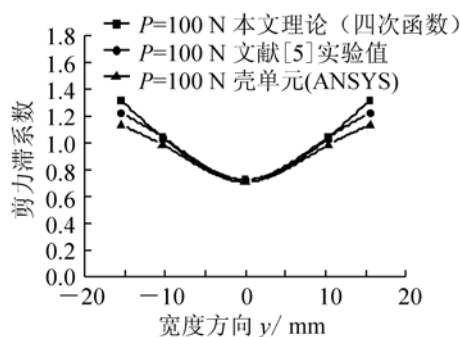


图 3 $P=100$ N 跨中剪力滞系数分布曲线

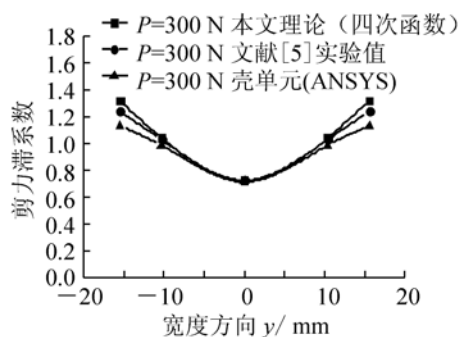


图 4 $P=300$ N 跨中剪力滞系数分布曲线

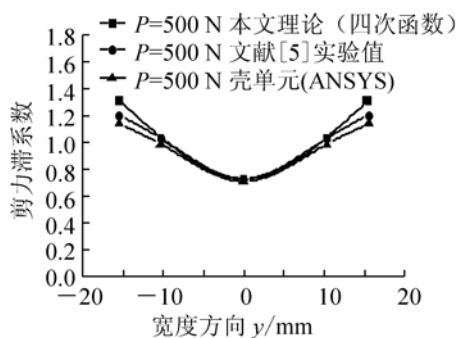


图 5 $P=500$ N 跨中剪力滞系数分布曲线

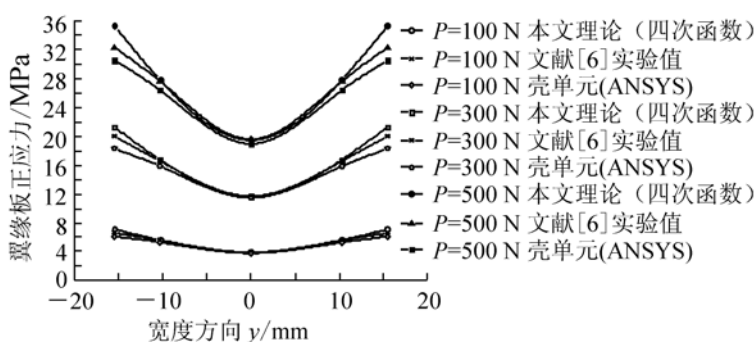


图 6 跨中翼缘板正应力分布曲线

4 结语

根据图可以看出, 用本文方法推导的公式计算的结果和 ANSYS 解以及文献[6]的实验结果吻合的良好, 说明以含三次项的四次抛物线 $f(y) = (1 - \frac{4y^3}{b^3} + \frac{3y^4}{b^4})$, 作为复合材料箱型连续梁的纵向位移函数是切实可行的。

从上述曲线亦可看出, 复合材料箱型连续梁的剪力滞系数和应力分布曲线与以往的均匀性材料的箱梁的分布曲线有明显的不同, 在复合材料箱梁接近肋板处有反弯点, 且曲线比较平缓。如果以其他文献中 $f(y) = (1 - \frac{y^3}{b^3})$, $f(y) = (1 - \frac{y^2}{b^2})$, $f(y) = (1 - \frac{y^6}{b^6})$ 等类似函数来模拟纵向位移函数的话, 由于此类抛物线不具备上述分布曲线的特征, 在箱梁宽度方向 y 值逐渐变大时, 即靠近肋板处时, 曲线变化比较急速,

与复合材料连续梁的剪力滞效应的变化规律明显不符,将会产生较大的误差。

综上所述,本文理论能够较好的对复合材料箱型连续梁的剪力滞效应进行分析,有实际应用价值和理论参考价值。

参 考 文 献

- [1] 曾宪桃,车惠民. 复合材料在桥梁工程中的应用及前景[J]. 桥梁建设,2000(2):66-70.
- [2] 吴亚平. 复合材料薄壁箱梁的剪滞剪切效应分析[J]. 土木工程学报,1996,29(4):31-37.
- [3] 吴亚平. 复合材料箱形梁弯曲的实用计算理论[J]. 兰州铁道学院学报,1995,14(3):20-27.
- [4] 郭金琼,房贞政,郑振. 箱型梁设计理论[M]. 2 版. 北京:人民交通出版社,2008.
- [5] 施琪,吴亚平. 碳纤维板的力学性能及箱形梁的试验研究[D]. 兰州:兰州交通大学土木工程学院,2009.
- [6] 杨乃宾. 复合材料飞机结构设计[M]. 北京:航空工业出版社,2002.

Theoretical Analysis of Composite Thin-walled Box Continuous Beam Considering Vertical Shear Deformation and Shear Lag Effect

Han Bo, Wu Yaping

(College of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, four-degree parabola of cubic term is adopted to simulate axial displacement of box beam flange, considering vertical shear deformation and shear lag effect, differential equations of symmetrically laminated composite box beam under symmetrical bending have been deduced firstly, and displacement difference functions in two-equal-span continuous beam under concentrated load P applied at mid-span respectively have been also deduced. Finally, based on a concrete example of composite thin walled box continuous beam, comparing the theoretical results of this paper with the result of the ANSYS finite element simulation and experiment results, it is demonstrated clearly that this method agrees well with the ANSYS finite element and experiment, so the results are reliable and accurate.

Key words: composite box continuous beam; shear lag effect; stress; shear lag coefficient; ANSYS