

参激单摆非线性系统动力学的实验研究

郝浩冬, 陈恩利, 李黎阳

(石家庄铁道大学 机械工程学院, 河北 石家庄 050043)

摘要:对一端受竖向简谐激励的单摆进行了实验。针对单摆系统进行了数值仿真,在仿真结果指导下对单摆系统进行了实验。对采集到的振动信号进行了相图和频谱分析,结果发现了共存周期二运动,周期四运动的倍周期分岔实验现象。

关键词:实验;单摆系统;倍周期分岔

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-0373(2010)03-0077-04

0 引言

单摆是讲述机械振动的传统内容,但一般只限定讨论简谐振动、阻尼振动和受迫振动几种情况,属线性系统的范畴。当单摆的角度大于 5° 时,其动力学方程是非线性的^[1]。本文研究的就是在非线性单摆理论研究基础上,对有垂直激励的单摆模型进行实验,通过改变激励频率,激励幅值,得到非线性现象。实验结果既可以验证理论,也可以推动非线性实验研究的发展^[24]。该类简谐激励单摆实验目前国内研究的很少,这种机械模型的非线性实验是很有意义的。

1 数值仿真

简谐激励的单摆模型如图1所示,杆的长度为 l ,杆端为一个质量为 m 的小球,杆被固定在基座上,基座受到垂直的简谐激励。单摆的运动方程通过拉格朗日方程推导得到: $\ddot{x} + c\dot{x} + w_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t) \sin x = 0$,其中, $\varepsilon = aw^2/g$, $w_0^2 = g/l$, $c = \mu/ml^2$ 。 w 是振动台的激励频率, a 是振动台的激励振幅。根据前期实验,利用自由衰减振动测得单摆系统固有频率 $w_0 = 10.1$,阻尼 $c = 0.5$ 。通过MatLab软件对此方程进行数值仿真,可以得到共存周期二运动,周期四运动。

当 $a = 0.01$ m, $w = 15.9$ ($f = 2.53$ Hz), $w_0 = 10.1$, $c = 0.5$ 时,可以得到周期二大振幅运动的时域曲线,含有庞加莱点的相图(分别见图2,图3)。

当 $a = 0.01$ m, $w = 18$ ($f = 2.88$ Hz), $w_0 = 10.1$, $c = 0.5$ 时,可以得到周期二小振幅运动的时域曲线,含有庞加莱点的相图(分别见图4,图5)。

当 $a = 0.01$ m, $w = 33$ ($f = 5.55$ Hz), $w_0 = 10.1$, $c = 0.5$ 时,可以得到周期四运动的时域曲线,含有庞加莱点的相图(分别见图6,图7)。

2 实验方案

根据实验研究的内容,为了更准确的测量实验数据,采用如下实验方案:控制台→振动台→单摆系统→采集系统→计算机。其中单摆由一个轻质杆和一个个在杆端部固定的小球组成,杆长0.11 m,杆质量6.2 g,小球质量11.5 g;电磁振动台和东菱控制柜组成控制系统,控制系统通过变频和变幅输出垂向简谐激励;支座固定在振动台上,单摆和角位移传感器固连在支座上;朗斯滤波器,INV360DF信号采集仪和计

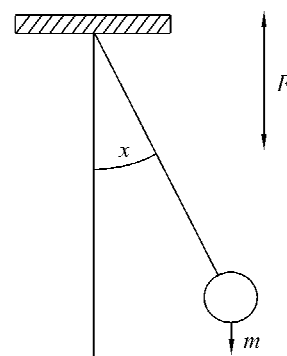


图1 简谐激励的单摆模型

收稿日期:2010-01-07

作者简介:郝浩冬 男 1985年出生 硕士研究生

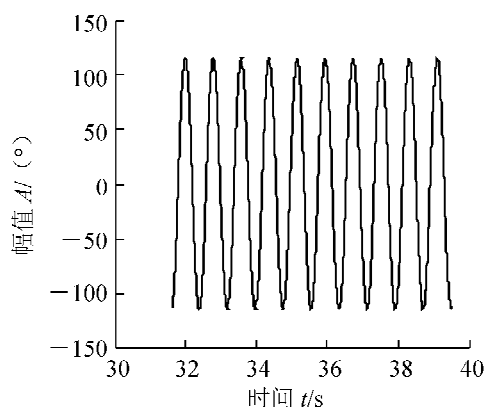


图 2 周期二大振幅运动时域曲线

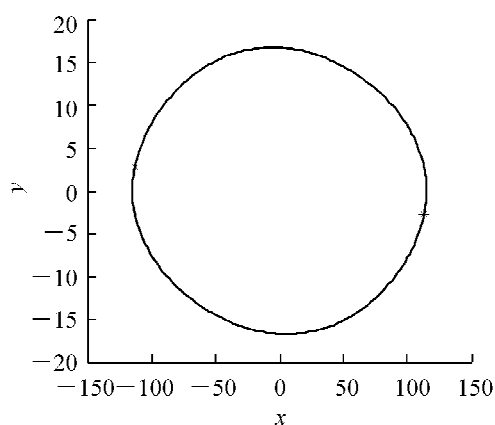


图 3 周期二大振幅运动相图

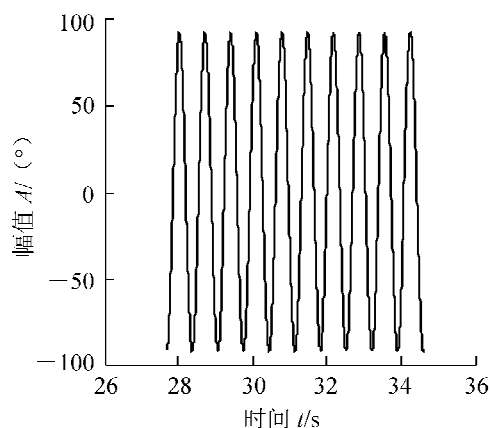


图 4 周期二小振幅运动时域曲线

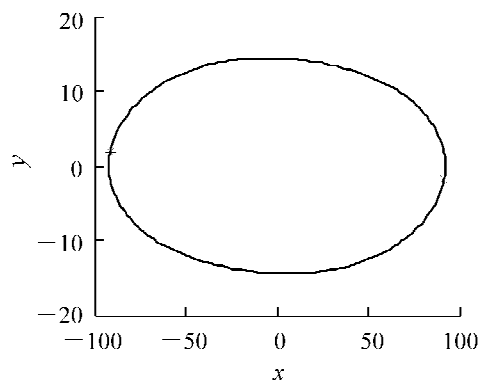


图 5 周期二小振幅运动相图

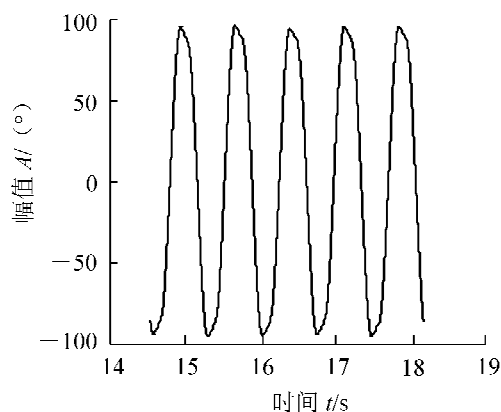


图 6 周期四运动时域曲线

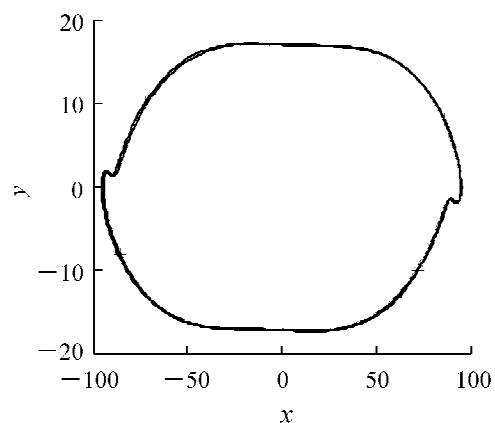


图 7 周期四运动相图

算机构成了采集系统;实验数据通过 MatLab 进行处理,利用 MatLab 对单摆方程进行同样参数仿真计算,两者进行对比。

实验具体步骤:

- (1) 设计并加工制作适于振动试验台的单摆模型,此模型与传感器连接后应尽量减小它们之间的摩擦。
- (2) 选择实验仪器设备。主要包括电磁振动台,角位移传感器,采集仪,滤波器,计算机等。
- (3) 正确组装实验装置,进行调试。
- (4) 对系统参数进行确定,主要是单摆的阻尼和固有频率,以便在理论计算中用到。

(5)在理论指导下,控制振动台进行实验,采集数据并进行分析对比。

3 实验研究

振动台由 puma 控制系统控制,可以改变振动台的激励频率,激励振幅。本次实验是采取固定激励振幅为 0.01 m,改变激励频率的方式来进行。

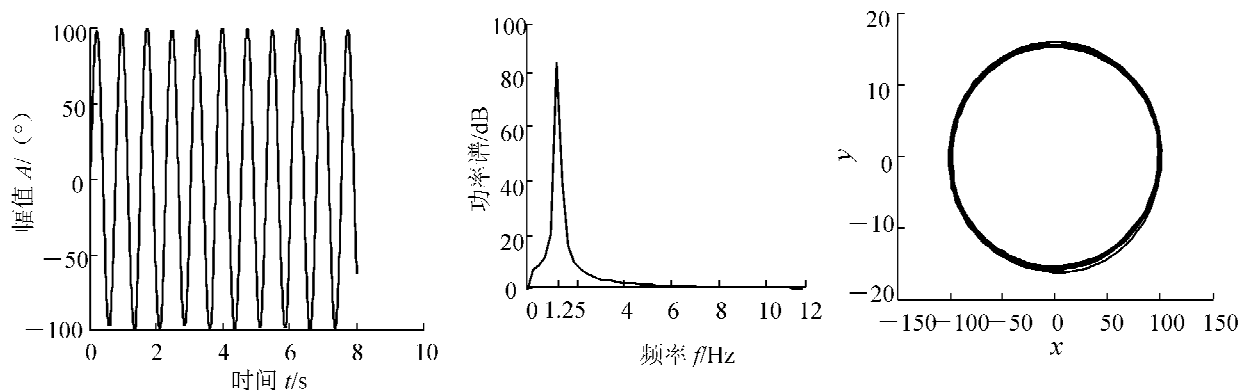


图8 周期二大振幅运动实验时域曲线

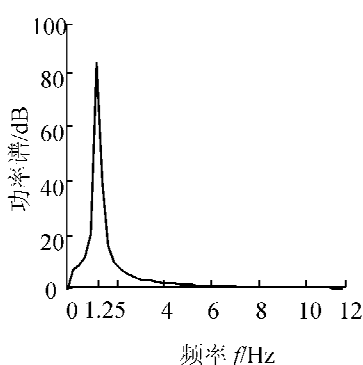


图9 周期二大振幅运动实验频谱曲线

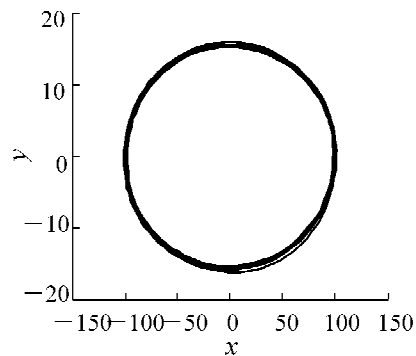


图10 周期二大振幅运动实验相图

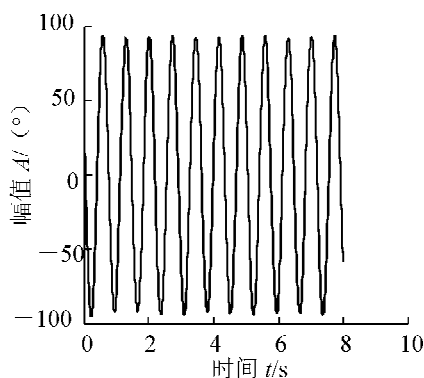


图11 周期二小振幅运动实验时域曲线

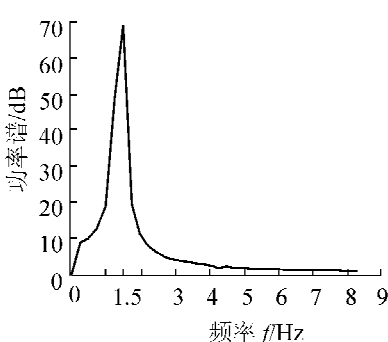


图12 周期二小振幅运动实验频谱曲线

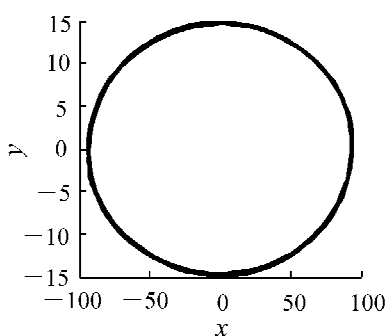


图13 周期二小振幅运动实验相图

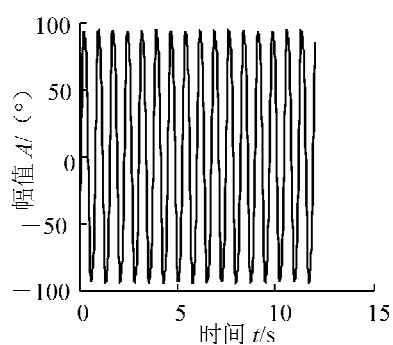


图14 周期四运动实验时域曲线

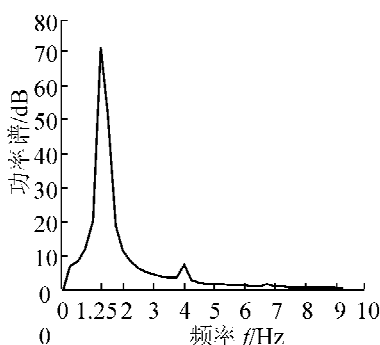


图15 周期四运动实验频谱曲线

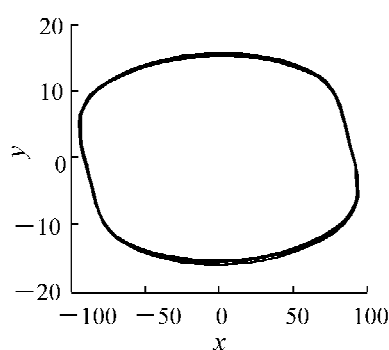


图16 周期四运动实验相图

根据数值仿真结果的指导,控制台从 $f = 2$ Hz 开始扫频,到达周期二要求频率范围时不断固定频率,然后给单摆一个初始位置,观察能否产生周期运动。在振动台频率达到 $f = 2.53$ Hz 时,单摆产生周期运动,此时采集数据,通过实验数据处理^[5],得到此时的响应为周期二大振幅运动,位移曲线,频谱图,相图分别见图8~图10;继续扫频,当频率达到 $f = 2.88$ Hz 时,单摆产生周期运动,此时采集数据,通过实验数据处理得到此时的响应为周期二小振幅运动,位移曲线,频谱图,相图分别见图11~图13;继续扫频,在产生周期四要求频率范围内不断固定频率,当振动台频率达到 $f = 5.28$ Hz 时,单摆产生周期运动,通过实验数据处理得到此时的响应为周期四运动,位移曲线,频谱图,相图分别见图14~图16。

4 结论

通过实验方法研究了简谐激励单摆的动力学响应,给出了实验条件下产生不同非线性现象的实验参数。非线性动力学现象和参数要求同理论上能形成很好的对照,可以推进理论的进一步研究。实验表明,在简谐激励下,单摆能够产生复杂的非线性动力学响应,揭示了共存周期二运动,周期四运动的倍周期分岔现象。

参 考 文 献

- [1] 陈予恕,季进臣. 非线性振动系统动力学行为的实验研究[J]. 力学进展,1996,26(4):473-481.
- [2] 季进臣,陈予恕,叶敏,等. 参激屈曲梁的倍周期分叉和混沌运动的实验研究[J]. 实验力学,1997,12(2):248-259.
- [3] 季进臣,陈予恕. 参激非线性振子不稳定区域的实验研究[J]. 振动工程学报,1997,10(4):491-495.
- [4] 金栋平,胡海岩. 两柔性梁碰撞振动类型的实验研究[J]. 实验力学,1999,14(2):129-135.
- [5] 王济,胡晓. MATLAB 在振动信号处理中的应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,知识产权出版社. 2006.

Experiment Study on Nonlinear Dynamics of Parametric Excitation Single Pendulum

Gao Haodong, Chen Enli, Li Liyang

(Department of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: An experiment study on single pendulum system with vertical parametric excitation is presented. The single pendulum system is studied by numerical simulation, and an experiment is carried out on single pendulum based on the result of numerical simulation. Through an analysis of the phase diagram and frequency spectrum of experiment's signal, the experiment finds the period doubling bifurcation phenomena with coexisting period-two and period-four phenomena.

Key words: experiment; single pendulum system; period doubling bifurcation