第23卷 第3期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 23 No. 3
2010年9月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Sep. 2010

凸合作对策核心的一扩展性质

刘 微[1], 李 靖[2], 封 梅[1]

(1. 河北化工医药职业技术学院 基础部,河北 石家庄 050026;
2. 石家庄铁路职业技术学院 信息工程系,河北 石家庄 050041)

摘要: 以超微分同性质凹函数及支撑函数作为性质的扩展载体,将凸合作对策的性质与其经典解核心联系起来,从而得到凸合作对策非空核心的一扩展性质,即其核心满足 Minkowski 和与 Minkowski 差。

关键词: 合作对策;核心;Minkowski 和;支撑函数

中图分类号: O225 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-0373(2010)03-0041-03

人合作对策(TU 对策)的核心是所有可行支付的集合,局中人的任何联盟都不能对其支付进行改善。它是一紧密的多面体结构,但可能是空集。本文则针对核心这一特点,将超微分同性质凹函数及支撑函数作为性质的扩展载体,从而得到凸合作对策核心的一扩展性质,即具有非空核心的凸合作对策其核心满足 Minkowski 和与 Minkowski 差。

1 预备定义

设 $v:2^N \to R$ 是 TU 对策,满足 $v(\varphi)=0, N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是局中人集合,$v(S)$ 是联盟 S 的赢得,$c(v)$ 表示对策 v 的核心即

$$c(v) = \langle x \in (R^N)^* \mid x(N) = v(N), x(S) \geqslant v(S), S \subset N \rangle。$$

设 V 是有限维向量空间, V^* 是其对偶空间,可以定义集合上的子集运算 $\hbar$ 。

定义 1 设集合 $A,B \in \hbar$,定义 $A \oplus B = \langle a+b \mid a \in A, B \in B \rangle$ 为 Minkowski 和, $A \ominus B = \langle Z \in V \mid Z \oplus B = A \rangle$ 为 Minkowski 差。

Minkowski 和与 Minkowski 差满足和与差的性质。

定义 2 设 A 是 V 中的非空紧集, V^* 是其对偶空间,若函数 $\varphi(A;\cdot)$ 满足 $\varphi(A;p) = \inf\limits_{x \in A} p(x)$ $(p \in V^*)$ 则 $\varphi(A;\cdot)$ 是 A 的支撑函数[1]。

支撑函数满足如下的性质:

(1) $\varphi(\alpha A;\cdot) = \alpha\varphi(A;\cdot), (\alpha > 0)$;

(2) $\varphi(A \oplus B;\cdot) = \varphi(A;\cdot) + \varphi(B;\cdot)$;

(3) $A \supset B \Rightarrow \varphi(A;\cdot) \leqslant \varphi(B;\cdot)$,对于凸集 B 满足 $A \supset B \Leftrightarrow \varphi(A;\cdot) \leqslant \varphi(B;\cdot)$ 。

定义 3 设 $f:V^* \to R$ 是 V 中的支撑函数,若 $\partial(f) = \langle x \in V \mid x(p) \geqslant f(p), \forall p \in V^* \rangle$ 是凸集,则 f 为超微分同性质凹函数。φ 和 ∂ 是对偶运算。

性质 1 设 f 是超微分同性质凹函数,若 f 具有对偶性,则有

(1)若 f 是 V^* 上超微分的同性质凹函数,那么有 $\partial(f) \neq \Phi, f(\cdot) = \varphi(\partial(f);\cdot)$;

(2)若 A 是 V 的非空紧集,那么有 $\partial(\varphi(A;\cdot)) = A$ 。

收稿日期: 2009-12-14
作者简介: 刘微 女 1980年出生 讲师
基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(A2005000301)

2 凸合作对策核心的性质

为了得到超微分同性质凹函数的核心,用恰当的方法将对策 v 延续成 R^N 上的函数 $\tilde{v}$,该延续可以把 R^N 分解成为锥体,这些锥体是由联盟链构成的。设联盟为一递减序列 $W = \{S_0 \supset \cdots \supset S_K\}$,称为链。$con(W) = \langle \sum_i \alpha_i 1_{S_i} \big| \alpha_0 \in R, \alpha_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,k \rangle$ 称为圆锥链。

空间 R^N 等价于由所有圆锥链组成,设 $P \subset R^N$, P 为 N 上的函数,并设 $C_0 < C_1 < \cdots < C_K$ 是它的顺序值 $S_j := \langle i \in N \mid P_i \geqslant C_i \rangle$, $P = C_0 1_N + \sum_{j \geqslant 1} (C_j - C_{j-1}) 1_{S_j} \in con(W)$ [2]。

定义对策 v 在 R^N 上的延续函数 $\tilde{v}$,即 $\tilde{v}(P) = C_0 1_N + \sum_{j=1}^{k} (C_j - C_{j-1}) v(S_j)$ 。对于每一个 $con(W)$ 中的锥体, $\tilde{v}$ 是一线性函数。

引理 1 设 v 是 TU 对策, $\tilde{v}$ 是 v 在 R^N 上的延续,那么有 $c(v) = \partial(\tilde{v})$ [2] 。

证明 $c(v) \supset \partial(\tilde{v})$ 满足事实,即在 $c(v)$ 中定义任何线性不等式,从而得到 $\partial(\tilde{v})$ 的线性不等式。反过来设 $x \subset c(v)$,在定义的 $\partial(\tilde{v})$ 中考虑不等式 $x(P) \geqslant v(P)$,即 P 属于圆锥链 $con(W)$ 。在这个圆锥中,函数 x 和 $\tilde{v}$ 是线性的,不等式在母点 1_N , 1_{S_j} 成立,等式在 -1_N 成立,故不等式在 P 点仍然成立。

证毕。

定理 1 设 v_1 和 v_2 是同性质的凹函数,那么有

(1) $\partial(v_1 + v_2) = \partial(v_1) \oplus \partial(v_2)$;(2) $\partial(v_1 - v_2) = \partial(v_1) \ominus \partial(v_2)$ 。

证明 (1)见 Moreau-Rockafellar 法则[3]。

(2)因 v_1 和 v_2 是凹函数,从而对于非空紧集 A 和 B 有 $v_1 = \varphi(A)$, $v_2 = \varphi(B)$ 。故 $\partial(v_1 - v_2) = \partial(\varphi(A) - \varphi(B)) = A \ominus B$ 。由对偶性质 $A = \partial(\varphi(A)) = \partial(v_1)$, $B = \partial(\varphi(B)) = \partial(v_2)$ 。从而得 $\partial(v_1 - v_2) = \partial(v_1) \ominus \partial(v_2)$ 。

证毕。

推论 1 若 A,B,C 为凸合作对策的子集,则满足下面的性质 $A = (A \oplus C) \ominus C$, $(A \oplus C) \ominus (B \oplus C) = A \ominus B$ 。

3 凸合作对策核心的一扩展性质

性质 2 若 $\tilde{v}$ 是凹函数,那么对策 v 则是凸对策 [4-5]。

这样的对策是凸对策,不是凹对策,见 Shapley[4-5](1971)定义。

例 1 考虑 3 个对策, $v(S) = |S| - 1$,若 $S \neq \Phi$ 这时有如下描述:设 $v = v_{\{1,2\}} + v_{\{1,3\}} + v_{\{2,3\}} - v_{\{1,2,3\}}$ 对策 v 的核心是一三角形

$$c(v) = \langle (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2, 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \rangle 。$$

对策 $v_{\{1,2,3\}}$ 是简单对策,故其核心是简单核心。即

$$c(v_{\{1,2,3\}}) = \langle (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \geqslant 0 \rangle ,$$

$$c(v_{\{i,j\}}) = \langle (x_1, x_2, x_3) \mid x_i + x_j = 1, x_i, x_j \geqslant 0, x_{\{1,2,3\} \setminus \{i,j\}} = 0 \rangle 。$$

$c(v_{\{1,2\}}) \oplus c(v_{\{1,3\}}) \oplus c(v_{\{2,3\}})$ 的和等价于顶点是按坐标(2,1,0)排列的六角形。两个三角形 $c(v) \oplus c(v_{\{1,2,3\}})$ 的 Minkowski 和等价于同样的六角形

$$c(v) \oplus c(v_{\{1,2,3\}}) = c(v_{\{1,3\}}) \oplus c(v_{\{2,3\}}) \oplus c(v_{\{1,2\}}) 。$$

从而有如下的分解

$$c(v) = c(v_{\{1,3\}}) \oplus c(v_{\{2,3\}}) \oplus c(v_{\{1,2\}} \ominus c(v_{\{1,2,3\}}) 。$$

若凸 TU 对策 v 满足 $v = v_1 - v_2$,则其核心满足如下定理。

定理 2 设 v_1 和 v_2 为凸 TU 对策,若 $v = v_1 - v_2$ 则有

(1) $c(v) = c(v_1) \oplus c(v_2)$ (Minkowski 和);

(2) $c(v) = c(v_1) \ominus c(v_2)$ (Minkowski 差)。

证明　由引理 1 及定理 1 得出下列式子

(1) $c(v_1 + v_2) = \partial((v_1 + v_2)^{\sim}) = \partial(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) = \partial(\tilde{v}_1) \oplus \partial(\tilde{v}_2) = c(v_1) \oplus c(v_2)$;

(2) $c(v_1 - v_2) = \partial((v_1 - v_2)^{\sim}) = \partial(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) = \partial(\tilde{v}_1) \ominus \partial(\tilde{v}_2) = c(v_1) \ominus c(v_2)$。

证明完毕。

核心是合作对策的经典解,它的性质有待进一步研究。

参 考 文 献

[1]VALDIMIT D,KOSHEVOY A . Cores of Cooperative Games, Superdifferential of Functions ,and the Minkowski Difference of Sets[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2000,7:117-124.

[2]SUIJS J, BORM P. Stochastic Cooperative Games: Superadditivity, Convexity, and Certainty Equivalents[J]. Games and Economic Behavior,2000,27(2):331-345.

[3]Rockafellar R T. Convex Analysis[J]. Math,2000,4:93-101.

[4]Shapley L S. Cores of Convex Games[J]. Game Theory,1971,8:11-26.

[5]谢政. 对策论[M]. 长沙:国防科技大学出版,2004.

Extension Character of Core Solution of Convex Cooperative Game

Liu Wei[1], Li Jing[2], Feng Mei[2]

(1. Hebei Chemical & Pharmaceutical Vocational Technology College, Shijiazhuang 050026, China;
2. Shijiazhuang Institute of Railway Technology, Shijiazhuang 050041, China)

Abstract: Using the superdifferential of homogeneous concave function and support function as an extension carrier of nature, by linking the convex cooperative game to the classical solution, a special character of an extension solution of the convex cooperative game is obtained. If a convex cooperative game can decompose as a difference or sum of convex games, then the core satisfies the Minkowski sum and Minkowski difference.

Key words: cooperative game; core; Minkowski sum; support function