

钢筋混凝土矩形梁最小成本设计曲面研究

尚艳亮¹, 聂辉², 赵军华¹

(1. 石家庄铁道学院 土木工程分院, 河北 石家庄 050043; 2. 石家庄铁道学院 工程力学系, 河北 石家庄 050043)

摘要:采用数学最优化理论, 结合现行设计规范, 对钢筋混凝土矩形梁在极限强度状态下进行研究。提供一个设计空间曲面作为最小成本设计时选用最优化配筋比的依据。求得梁断面的最优配筋比及其相对应断面有效高度, 以使得梁体成本最小。求取一个配筋比边界曲面作为区分采用单筋或双筋梁设计之用。

关键词:钢筋混凝土矩形梁; 最优化设计曲面; 最小成本设计

中图分类号: TU311 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-0300(2009)03-0108-04

1 引言

当前钢筋混凝土矩形梁体成本视其梁体尺寸、配筋比、钢筋及混凝土的单位成本而定。如果建筑师为了强调建筑效果而限制了梁构件的高度及宽度, 那么工程师只能在受限的空间内配置所需的钢筋量。因为在理论上有限组断面尺寸及对应配筋比的组合可产生近似的弯矩, 用传统的设计方法就算只考虑简支构造中的梁构件, 所以要达到钢筋混凝土梁最小成本化的目的非常困难。本文在钢筋混凝土矩形梁设计阶段, 引入成本最小化控制观念, 分别考虑单筋或双筋梁配筋模式, 在现行设计规范^[1]的钢筋混凝土梁极限弯矩强度的限制下, 以最优化方法分析并建立一个钢筋混凝土梁的最优化的空间曲面, 以得到符合经济性与安全性的最优钢筋混凝土梁断面的设计。本文拟选用拉格朗日(Lagrange)乘子法来分析等式约束最优化问题^[2,3]。

2 单筋矩形梁问题

钢筋混凝土矩形梁(包括单筋梁与双筋梁)断面性质如下:(1)断面高度 h ;(2)等值应力方块高度 a ;(3)断面梁宽 b ;(4)最外缘压力纤维至拉力钢筋中心的距离 d ;(5)最外缘压力纤维至压力钢筋中心的距离 d' ;(6)拉力钢筋量 A_s ;(7)压力钢筋量 A_s' ;(8)钢筋屈服应力强度 f_y (单位: N/mm^2);(9)混凝土压力强度 f_c' (单位: N/mm^2)。

2.1 限制函数

(1)挠曲弯矩容量。单筋矩形梁当应力平衡时, 混凝土区的压力必须等于钢筋的拉力, 可得等效矩形应力块高度 $a = \rho d f_y / 0.85 f_c'$, 所以在混凝土区和钢筋之间产生的标称弯矩

$$M_n = \rho b d^2 f_y (1 - \rho f_y / 1.7 f_c') \quad (1)$$

式中, ρ 为配筋比(A_s/bd)。

采用极限强度设计法, 其极限设计弯矩强度

$$M_u \leq \phi \rho b d^2 f_y (1 - \rho f_y / 1.7 f_c') \quad (2)$$

式中, ϕ 为强度折减系数, 一般取0.9。

(2)配筋比的上限量。为避免非韧性破坏行为的产生, 限制配筋比不得大于 $\rho_{\max}$ 。

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = 0.75 \times \frac{0.85 \beta_1 f_c'}{f_y} \frac{6120}{6120 + f_y} \quad (3)$$

收稿日期: 2008-10-08

作者简介: 尚艳亮 男 1980年出生 讲师

式中, ρ 为断面平衡破坏时的配筋比; β_1 为矩形应力块强度因子。

(3) 配筋比的最小限制。如果梁体开裂后其所承受的弯矩大于其开裂后的强度, 将造成无预警式的破坏。因此规范规定最小的挠曲钢筋使用量为

$$\rho_{\min} = 14/f_y \geq 0.8 \sqrt{f'_c}/f_y \quad (4)$$

钢筋混凝土梁的主筋用量被限制在 $\rho_{\max}$ 及 $\rho_{\min}$ 之间。设计规范中并无指示如何在可行的配筋比范围内选用钢筋比, 因此如何去挑选最好的配筋比仍然值得考虑。

(4) 钢筋临界使用量。为了使梁断面在拉力控制的范围内, 根据规范, 利用相似三角形原理得 $a/d = 3\beta_1/8$; 由 $\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{0.85f'_c\beta_1ba}{bdf_y}$, 得临界钢筋比 $\rho_{\text{bound}} = \frac{51}{160}\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}$ 。

当所设计出的钢筋比小于 ρ_{bound} , 则采用单筋梁断面设计; 若所设计出的钢筋比大于 ρ_{bound} , 则采用双筋梁断面设计。

2.2 目标函数

每单位长度梁体的总成本为材料成本、梁几何断面、钢筋使用面积及模板成本的函数^[4]。假设材料成本比 $C_{sc} = C_s/C_c$ 及 $C_{fc} = C_f/C_c$, 每单位长度成本目标函数可表示为

$$C = C_c \{ C_{sc}\rho b d + (1 + \eta) b d + C_{fc} [2(1 + \eta) d + b] \} \quad (5)$$

式中, C_s 为钢筋的单位成本; C_c 为混凝土的单位成本; C_f 为模板的单位成本; η 为钢筋保护层与断面有效高度比 ($\eta = d'/d$)。

依据拉格朗日原理, 该最优化问题的非约束拉格朗日方程式为

$$L = C_{sc}\rho b d + (1 + \eta) b d + C_{fc} [2(1 + \eta) d + b] + \lambda \left[\varphi \rho b d^2 f_y \left(1 - \frac{\rho f_y}{1.7 f'_c} \right) - M_u \right] \quad (6)$$

2.3 最优配筋比设计

由式(6)将非约束拉格朗日方程式对 ρ 及 d 分别偏微分后设定为0并解其系统方程式, 可得最优配筋比

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{1}{\frac{C_{sc} b}{(b + 2C_{fc})(1 + \eta)} + \frac{20f_y}{17f'_c}} \quad (7)$$

由式(7)式直接反映了断面有效高度, 该有效高度为

$$d_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{M_u}{\varphi \rho_{\text{opt}} f_y \left(1 - \frac{\rho_{\text{opt}} f_y}{1.7 f'_c} \right)}} \quad (8)$$

对于单筋矩形梁最优化解, 由式(7)所求出的最优化配筋比 ρ_{opt} 大于临界配筋比 ρ_{bound} , 因此其判断式为

$$\frac{f_y}{f'_c} \leq \frac{1}{1 + \eta} \frac{51\beta_1}{160 - 60\beta_1} \frac{C_{sc} b}{2C_{fc} + b} \quad (9)$$

3 双筋矩形梁问题

3.1 目标函数

双筋梁每单位长度成本为

$$C = C_c \{ C_{sc}(\rho + \rho') b d + (1 + \eta) b d + C_{fc} [2(1 + \eta) d + b] \} \quad (10)$$

式中, ρ' 为压力配筋比, 其值为 $\rho' = \rho - \rho_{\text{bound}} = \rho - \frac{51}{160}\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}$ 。

3.2 限制函数

根据临界配筋比 ρ_{bound} 表达式, 矩形梁的临界弯矩阻抗 M_{bound} 其值为

$$M_{\text{bound}} = \frac{51}{160} \varphi \beta_1 f'_c \left(1 - \frac{3}{16} \beta_1 \right) b d^2 \quad (11)$$

当极限设计弯矩超过单筋断面所能承受的临界弯矩 M_{bound} 时,断面必须配置压力钢筋,在这种情形下,如果压力钢筋应力达屈服强度其极限设计弯矩强度为

$$M_u = M_{\text{bound}} + \varphi \rho' b d f_y (d - d') \quad (12)$$

3.3 最优配筋比设计

双筋梁的最优化设计问题可被描述为

$$C_{\min} = C_{sc} \left(2\rho - \frac{51}{160} \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \right) b d + (1 + \eta) b d + C_{fc} [2(1 + \eta) d + b] \quad (13)$$

则该最优化问题的非约束拉格朗日方程式推导如下

$$L = C_{sc} \left(2\rho - \frac{51}{160} \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \right) b d + (1 + \eta) b d + C_{fc} [2(1 + \eta) d + b] + \lambda \left\{ \varphi \left[\rho b d^2 f_y (1 - \eta) - \frac{51}{160} \beta_1 f_c' b d^2 \left(\frac{3}{16} \beta_1 - \eta \right) \right] - M_u \right\} \quad (14)$$

同理可获得最优化配筋比

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{(1 + \eta)(b + 2C_{fc})}{2C_{sc}b} - \frac{51}{1280} \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{4 + 12\eta - 3\beta_1}{1 - \eta} \quad (15)$$

假设压力配筋比满足上述推导,那么其对应的拉力配筋比将可设定为最优配筋比,且其所相对的双筋梁最优有效高度

$$d_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{M_u}{\varphi b \left[\rho_{\text{opt}} f_y (1 - \eta) - \frac{51}{160} \beta_1 f_c' \left(\frac{3}{16} \beta_1 - \eta \right) \right]}} \quad (16)$$

对于双筋梁最优化解,由式(14)所求出的配筋比 ρ_{opt} 必须大于临界配筋比 ρ_{bound} ,因此其判断式为

$$\frac{f_y}{f_c'} \geq \frac{51 \beta_1 b C_{sc} (12 + 4\eta - 3\beta_1)}{640 (1 - \eta^2) (b + 2C_{fc})} \quad (17)$$

综合考虑式(9)和式(17),根据 Ceranic 和 Fryer (2000)^[5]所提出的理论:在材料强度比 f_y/f_c' 的定义范围内,最优化配筋比有三个明显的分类区。本文中这三个分类区均以空间曲面方式表现,界定该分类区的边界是材料成本比 C_{sc} 和 C_{fc} 、梁宽 b 、钢筋保护层与有效高度比 η 与因子 β_1 。

4 算例

某单筋梁宽 b 设计需求为 0.30 m,承受最大弯矩 250 kN·m, η 为 0.15,材料成本比 $C_{sc} = 50$ 、 $C_{fc} = 0.12$,混凝土成本为 2 500 元/m,钢筋屈服强度为 $f_y = 2\ 800$ kg/cm²、混凝土极限抗压强度 $f/C = 350$ N/mm²,因此材料强度比 $f_y/f_c' = 8.0$ 。在这种设计条件下,将相关设计参数代入式(1)~式(9),其分类临界值 $f_y/f_c' = 8.799$ 大于该梁的材料强度比 8.0,因此该设计断面采用单筋断面,并求出最优化配筋比 ρ_{opt} 为 0.029 8,其相对应的最优断面有效深度比 d_{opt} 为 35.93 cm,所需断面钢筋量 A_s 为 32.12 cm²。再根据试算法迭代计算出的相关设计参数与之非常相近,误差不超出 3‰。

5 结语

(1)单筋及双筋混凝土矩形梁在弯曲强度的约束条件限制下,依据其最小成本设计解析解,说明拉格朗日乘子法可以很成功的应用在梁体的设计上并满足最小成本的要求。

(2)设计空间曲面将其解空间区分为三个不同的分类区,将梁体设计区分为单筋、临界及双筋设计,分类区是以材料的强度比 f_y/f_c' 做为分类的依据,而分类值 f_y/f_c' 是依据材料成本比 C_{sc} 、 C_{fc} 、钢筋保护层与断面有效高度比 η 、梁宽 b 及矩形应力块强度因子 β_1 而定。

(3)依据拉格朗日乘子法所推演出的相关公式在设计单一梁体时,使用上无需反复的迭代过程,较容易帮助设计者选择最优配筋比,所需的参数设计曲线可由相似的方式推导。但对于大尺寸构件、预制构件及为配合系统模板应用而需将梁体长宽尺寸加以固定时,需要考虑另外的因素,应用本文公式时须对

该公式加以修正。

参 考 文 献

- [1] 中华人民共和国国家标准. GB50010—2002 混凝土结构设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- [2] Adamu A, Karihaloo B L. Minimum cost design of reinforced concrete beams using continuum-type optimality criteria[J]. Journal of Structural Optimization, 1994, 7(14): 91-102.
- [3] Al-Salloum Y A, Siddiqi G H. Cost-optimum design of reinforced concrete beams[J]. ACI Structural Journal, 1994, 91(6): 647-655.
- [4] Balaguru P N. Discussion of optimum reinforced concrete T-beam section[J]. Journal of Structure Division, ASCE, 1978, 104(3): 616-619.
- [5] Fryer C, Ceranic B. Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams[J]. Journal of Structural Optimization, 2000, 20(21): 260-268.

Design Surfaces for Minimum Cost Design of Reinforced Concrete Rectangle Beams

Shang Yanliang¹, Nie Hui², Zhao Junhua¹

(1. School of Civil Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: Using mathematics optimization theory and referring to the present design standard, this article conducts the research on the reinforced concrete rectangular beam which is under the ultimate strength condition. A design space surface is provided as a basis for selecting the optimal steel ratio in case of minimum cost design. The optimal reinforced ratios and effective depths of the cross sections of reinforced concrete rectangular beams are obtained which lead to a minimum cost design. A boundary steel ratio surface is suggested to distinguish singly and doubly reinforced design.

Key words: reinforced concrete rectangle beams; optimal design surfaces; minimum cost design

(上接第 107 页)

泥。(2) 选择优质高效的复合外加剂是配制低温早强耐防腐高性能混凝土的前提, 才能有效地提高长期耐久性。(3) 在低温早强耐久防腐高性能混凝土的配制和施工上, 必须注重材料的选择及施工质量控制各个环节。

参 考 文 献

- [1] 魏建朝. 青藏铁路恶劣环境下混凝土的试验与应用[J]. 铁道技术监督, 2009, 37(5): 26-28.
- [2] 郁慕贤. 青藏铁路耐久性混凝土的配制与施工控制[J]. 铁道建筑, 2004, (9): 78-80.

Study on Mix Proportion Design of High Performance Concrete for Qinghai-Tibet Railway

Meng Wanlong

(The 3rd Engineering Company of the 13th China Railway Construction Bureau Group, Shenyang 110043, China)

Abstract: According to the environment features in Qinghai-Tibet railway line, the technique requirements for erosion resistant enduring concrete of early strength under low temperature are analyzed, and the selection of raw materials of concrete and concrete mix proportion design through orthogonal test are emphatically introduced. Concrete mix proportion from the method in this paper perfectly satisfies the requirements of construction and specification.

Key words: high performance concrete; early strength under low temperature; endure and erosion resistant; orthogonal test