第22卷　第3期　　石家庄铁道学院学报(自然科学版)　　Vol. 22　No. 3
2009年9月　JOURNAL OF SHIJIAZHUANG RAILWAY INSTITUTE (NATURAL SCIENCE)　Sep. 2009

非奇异 H-矩阵与 M-矩阵的判定准则

王　永

(临沂师范学院 费县分校,山东 临沂　273400)

摘要:给出了非奇异 H- 矩阵与 M- 矩阵的新的实用充分条件,从而改进和推广了以往的相应结果,并给出了相应的数值例子说明了结果的有效性。

关键词:严格对角占优矩阵;非奇异 H- 矩阵;M -矩阵

中图分类号:O151.21　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1674 - 0300(2009)03 - 0098 - 04

1　引言

非奇异 H- 矩阵是应用广泛的一类特殊矩阵,它在矩阵理论、数量经济学和数学物理等诸多领域发挥着重要作用。然而其实际判别却比较困难。文献[1] ~ 文献[6] 给出了一些比较实用的判别方法。继续这方面的研究,给出了非奇异 H- 矩阵与 M -矩阵几个新的实用性判据,推广和改进了文献[1]的主要结论。

用 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$表示 n 阶复矩阵,设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,若

$$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=\Lambda_i(A)\tag{1}$$

对每一 $i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$ 都成立,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in D$;若(1) 式均为严格不等式,则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in SD$;若存在正对角阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{AX}\in SD$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H 矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{H}$,令 $\tilde{a}_{ii}=|a_{ii}|$,$\tilde{a}_{ij}=-|a_{ij}|$,$\forall i,j\in N,i\neq j$,则称 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})$,为 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵。

记 $N=N_1\oplus N_2$,其中 $N_1=\{i\in N|\,0<|a_{ii}|\leqslant\Lambda_i(A)\}$,$N_2=\{i\in N\,\|a_{ii}|>\Lambda_i(A)\}$。当 $N_1=\varphi$ 时,显然 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{H}$;当 $N_2=\varphi$ 时,由文献[2] 知 $\boldsymbol{A}$ 不是非奇异 H- 矩阵,故假设 $N_1\neq\varphi$,$N_2\neq\varphi$。此外,当 $N_1(N_1)$ 为单点集时,规定 $\sum_{t\in\varphi}\cdot=0$。

根据文献[3] 引理1,总能假定矩阵的每一行的非主对角元的模和非零,即 $\Lambda_i(A)\neq0$, $\forall i\in N$。为书写方便,简记 $\delta_i(A)=\Lambda_i(A)/|a_{ii}|$, $\forall i\in N$。

定义 1[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,$a_{ij}\leqslant0$, $\forall i,j\in N,i\neq j$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵;若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 M- 矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{K}$。

引理 1[5]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,若存在正对角阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$,使得 $\boldsymbol{XAY}\in\mathscr{H}$,则 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{H}$。

引理 2[6]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{H}$ 的充要条件是 $\tilde{A}\in\mathscr{K}$。

引理 3[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,若 $|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1,\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|\,\delta_t(A)$, $\forall i\in N_1$,则 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{H}$。

2　主要结果

定理 1　已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若存在 $N_1^0,N_2^0\subset N$,$N=N_1^0\cup N_2^0$,$N_1^0\cap N_2^0=\varphi$, $\forall i\in N_1^0$, $\forall j\in N_2^0$,满足下列条件:

(i) $\Lambda_i(A)-\sum_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\,\delta_t(A)>0$;

(ii) $\left(\Lambda_i(A)-\sum_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\,\delta_t(A)\right)\left(|a_{jj}|-\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|\right)>\sum_{t\in N_2^0}|a_{it}|\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\,\delta_t(A)$。

收稿日期:2009 - 04 - 01
作者简介:王永　男　1980 年出生　硕士研究生

则 $A\in\mathscr{H}$ 且 $\tilde{A}\in\mathscr{M}$。

证明：令

$$H_i(A)=\frac{\Lambda_i(A)-\sum\limits_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\delta_t(A)}{\sum\limits_{t\in N_2^0}|a_{it}|},\ \forall i\in N_1^0;$$

$$h_j(A)=\frac{\sum\limits_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\delta_t(A)}{|a_{jj}|-\sum\limits_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|},\ \forall j\in N_2^0;$$

当 $i\in N_1^0$ 时，若 $\sum\limits_{t\in N_2^0}|a_{it}|=0$，记 $H_i(A)=+\infty$。由(i)，(ii) 知 $0\leqslant\max\limits_{j\in N_2^0}h_j(A)<\min\limits_{i\in N_1^0}H_i(A)$。

由定理条件知存在正数 ε，使得 $\max\limits_{j\in N_2^0}h_j(A)<\varepsilon<\min\limits_{i\in N_1^0}H_i(A)$，构造正对角阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}=(b_{ij})$，其中，$x_i=\delta_i(A)$，$i\in N_1^0$，$x_i=\varepsilon$，$i\in N_2^0$。

当 $\forall i\in N_1^0$ 时，由 $H_i(A)>\varepsilon$ 知 $\Lambda_i(B)=\sum\limits_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\delta_t(A)+\varepsilon\sum\limits_{t\in N_2^0}|a_{it}|<\Lambda_i(A)=\delta_i(A)|a_{ii}|=|b_{ii}|$；

当 $j\in N_2^0$ 时，由 $h_i(A)<\varepsilon$ 知 $\Lambda_j(B)=\sum\limits_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\delta_t(A)+\varepsilon\sum\limits_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|<\varepsilon|a_{jj}|=|b_{jj}|$。

可见 $\forall i\in N$，$|b_{jj}|>\Lambda_i(B)$，故 $\boldsymbol{B}\in\mathscr{H}$，从而由引理 1 知 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{H}$，由引理 2 知 $\tilde{A}\in\mathscr{M}$。

定理 2　已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，若存在 $N_1^0,N_2^0\subset N$，$N=N_1^0\cup N_2^0$，$N_1^0\cap N_2^0=\varphi$，$\forall i\in N_1^0$，$\forall j\in N_2^0$，使得

$$\Lambda_i(A)-\sum_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\delta_t(A)>0,$$

且

$$\{\Lambda_i(A)-\sum_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\delta_t(A))\left(|a_{jj}|-\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\frac{\sum\limits_{k\in N_2^0}|a_{tk}|}{|a_{tt}|}\right)>$$

$$\sum_{t\in N_2^0}|a_{it}|\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\frac{\sum\limits_{k\in N_1^0,\neq i}|a_{tk}|\delta_k(A)}{|a_{tt}\}},$$

则 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{H}$ 且 $\tilde{A}\in\mathscr{M}$。

证明：令

$$m_i(A)=\frac{\sum\limits_{t\in N_2^0}|a_{it}|}{\Lambda_i(A)-\sum\limits_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\delta_t(A)},\ \forall i\in N_1^0;$$

$$M_j(A)=\frac{|a_{jj}|-\sum\limits_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|-\sum\limits_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\frac{\sum\limits_{k\in N_2^0}|a_{tk}|}{|a_{tt}|}}{\sum\limits_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\frac{\sum\limits_{k\in N_1^0,\neq t}|a_{tk}|\delta_k(A)}{|a_{tt}|}},\ \forall j\in N_2^0;$$

当 $j\in N_2^0$ 时，若 $\sum\limits_{t\in N_1^0}|a_{jt}|=0$，记 $M_j(A)=+\infty$。由(i)(ii) 知 $0<\max\limits_{i\in N_1^0}m_i(A)<\min\limits_{j\in N_2^0}M_j(A)$。

由定理条件知存在正数 ε，使得

$$\max_{i\in N_1^0}m_i(A)<\varepsilon<\min_{j\in N_2^0}M_j(A),$$

构造正对角阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}=(b_{ij})$，其中，$x_i=\varepsilon\delta_i(A)$，$i\in N_1^0$，$x_i=1$，$i\in N_2^0$。

当 $j\in N_2^0$ 时,有

$$|b_{jj}|-\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|b_{jt}|=|a_{jj}|-\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|>0,$$

且

$$h_j(B)=\frac{\sum_{t\in N_1^0}|b_{jt}|\delta_t(B)}{|b_{jj}|-\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|b_{it}|}=\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\varepsilon\delta_t(A)\frac{\varepsilon\sum_{k\in N_1^0,\neq t}|a_{tk}|\delta_k(A)+\sum_{k\in N_2^0}|a_{tk}|}{|a_{tt}|\varepsilon\delta_t(A)(|a_{jj}|-\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|)}=$$

$$\left(\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\frac{\varepsilon\sum_{t\in N_1^0,\neq t}|a_{tk}|\delta_k(A)}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\frac{\sum_{k\in N_2^0}|a_{tk}|}{|a_{tt}|}\right)\frac{1}{|a_{jj}|-\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|},$$

由于 $\varepsilon<\min\limits_{i\in N_2^0}M_j(A)$,代入上式得 $0\leqslant h_j(B)<1,\forall j\in N_2^0$。

当 $\forall i\in N_1^0$ 时,由 $m_i(A)<\varepsilon$ 知 $\Lambda_i(B)=\varepsilon\sum_{t\in N_1^0,\neq i}|a_{it}|\delta_t(A)+\sum_{t\in N_2^0}|a_{it}|<\varepsilon\Lambda_i(A)=\varepsilon\delta_i(A)|a_{ii}|=|b_{ii}|$,

于是 $\forall i\in N_1^0$,有 $\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1^0,\neq i}|b_{it}|\delta_t(B)\geqslant 0$。

因此,当 $\sum_{t\in N_2^0}|b_{it}|\neq 0$ 时,有

$$H_i(B)=\frac{\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1^0,\neq i}|b_{it}|\delta_t(B)}{\sum_{t\in N_2^0}|b_{it}|}\geqslant 1,\forall i\in N_1^0,$$

当 $\sum_{t\in N_2^0}|b_{it}|=0$ 时,记 $H_i(B)=+\infty$。

综上可知 $\max\limits_{j\in N_2^0}h_j(B)<1<\min\limits_{i\in N_1^0}H_i(B)$,可见 B 满足定理 1 的条件,故 $B\in\mathscr{H}$,从而由引理 1 知 $A\in\mathscr{H}$,由引理 2 知 $\tilde{A}\in\mathscr{h}$。

记

$$\Omega_1=\{A\mid A\in C^{n\times n},\text{满足引理 3 的条件}\},$$
$$\Omega_2=\{A\mid A\in C^{n\times n},\text{满足定理 2 的条件}\}。$$

定理 3 $\Omega_1\subset\Omega_2$。

证明 在定理 2 中特取 $N_1^0=N_2,N_2^0=N_1$。设 $A\in\Omega_1$,则 $\forall i\in N_2^0,\sum_{t\in N_1^0}|a_{it}|\neq 0$。

当 $\forall j\in N_2^0$ 时,由 $|a_{jj}|>\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\delta_t(A)$ 得 $\min\limits_{j\in N_2^0}M_j(A)>1$;

当 $\forall i\in N_1^0$ 时,由 $|a_{ii}|>\Lambda_i(A)$ 得 $\max\limits_{i\in N_1^0}m_i(A)<1$。

所以可得 $\Omega_1\subseteq\Omega_2$。又因为 $\forall A\in\Omega_2$ 可容许存在 $\forall j\in N_2^0$,使得

$$|a_{jj}|\leqslant\sum_{t\in N_2^0,\neq j}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_1^0}|a_{jt}|\delta_t(A),$$

所以 $\Omega_1\subset\Omega_2$。

3 数值例子

例 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&2&4&2\\10&10&2&0\\0&2&10&3\\1&1&1&10\end{pmatrix}$$

则 $N_1 = \{1,2\}, N_2 = \{3,4\}$。

因为

$$|a_{22}| = 10 < |a_{21}| + |a_{23}|\delta_3 + |a_{24}|\delta_4 = 11,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 不满足引理 3 的条件。

但是，若令 $N_1^0 = \{1,3\}, N_2^0 = \{2,4\}$，计算可得

$$m_1 = \frac{2}{3}, m_3 = 1, M_2 = \frac{23}{20}, M_4 = \frac{111}{4}。$$

由定理 2 知 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H- 矩阵。

参 考 文 献

[1]黄廷祝. 非奇异 H-矩阵的简捷判据[J]. 计算数学,1993,9(3):318-328.
[2]逄明贤. 矩阵谱论[M]. 吉林:吉林大学出版社,1990.
[3]于泰彬,黄廷祝. 非奇异 H-矩阵的实用性充分条件[J]. 计算数学,2004,20(1):109-116.
[4]程云鹏,张凯院,徐仲. 矩阵论[M]. 2 版. 西安:西北工业大学出版社,2002.
[5]Neumann M. A note generalizations of strict diagonal dominance for real matrices[J]. Linear Algebra Appl,1979,26:3-14.
[6]陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:高等教育出版社,1990.

Criteria for Nonsingular *H*-Matrices and *M*-Matrices

Wang Yong

(Department of Mathematics, Feixian College of Linyi Normal University, Linyi 273400, China)

Abstract: Some sufficient conditions for nonsingular H-matrices and M-matrices are given in this paper. Some related results are improved and generalized. Its effectiveness is illustrated through a numerical example.

Key words: strictly diagonally dominant matrix; nonsingular H-matrix; M-matrix

(上接第 94 页)

Research on Multichannel Data Acquisition System Based on DSP and LabVIEW

Zhou Wei,　**Zhang Changqing**,　**Feng Guosheng**

(School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: By using DSP56F807 produced by Freescale Company instead of data acquisition card, people can talk to DSP using a software named CodeWarrior and DSP communicates to LabVIEW through the serial port while LabVIEW is used to process data. It is proved by experiment that the multi-channel data acquisition system works rapidly and credibility.

Key words: DSP56F807; LabVIEW; multichannel; data acquisition; serial communication