第 22 卷 第 3 期 石家庄铁道学院学报(自然科学版) Vol. 22 No. 3
2009 年 9 月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG RAILWAY INSTITUTE (NATURAL SCIENCE) Sep. 2009

# 关于一类非线性映射迭代序列收敛的等价性

王亚宁

(石家庄铁道学院 数理系,河北 石家庄 050043)

**摘要**:对任意实 Banach 空间中的广义 $\Phi$-压缩映射分别证明了 Mann 迭代序列与 Noor 迭代序列收敛的等价性以及 Mann 迭代序列与 Ishikawa 迭代序列收敛的等价性,所得的结果是 2005 年 S. M. Soltuz 和 2007 年 Xue Zhiqun 等人结果的相应推广与改进。

**关键词**:广义 $\Phi$-压缩映射;不动点;Noor 迭代序列;Mann 迭代序列;Ishikawa 迭代序列

**中图分类号**:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1674-0300(2009)03-0095-03

## 1 基本概念和引理

**定义 1.1** 设 $E$ 是一个 Banach 空间,$D$ 是 $E$ 的一个非空闭凸子集,$T$ 是 $D$ 的一个自映射,令 $u_0,x_0,z_0\in D$,则定义

Mann 迭代为[1]

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_n Tu_n,n\geqslant 0 \tag{1}$$

Ishikawa 迭代[2]为

$$\begin{cases} y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n, \\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n,n\geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

三步迭代[3]为

$$\begin{cases} v_n=(1-\gamma_n)z_n+\gamma_n Tz_n, \\ w_n=(1-\beta_n)z_n+\beta_n Tv_n, \\ z_{n+1}=(1-\alpha_n)z_n+\alpha_n Tw_n,n\geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

式中,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的实数序列。

**定义 1.2**[4] 设 $T$ 是 $D\to D$ 的一个映射,存在实数 $\alpha,\beta,\gamma$,且 $0<\alpha<1,0<\beta,\gamma<\frac{1}{2}$,对 $D$ 中的每一对 $x,y$,当 $T$ 至少满足下述三个条件之一时:

(1) $\|Tx-Ty\|\leqslant\alpha\|x-y\|$ ;

(2) $\|Tx-Ty\|\leqslant\beta(\|x-Tx\|+\|y-Ty\|)$;

(3) $\|Tx-Ty\|\leqslant\gamma(\|x-Ty)+\|y-Tx\|)$。

称 $T$ 为一个 Zamfirescu 算子,简称 $Z$ 算子。注意:当 $T$ 为一个 Zamfirescu 算子时,算子 $T$ 必满足下列不等式

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\delta\|x-y\|+2\delta\|x-Tx\| \tag{4}$$

式中,$x,y\in D,\delta=\max\left\{\alpha,\frac{\beta}{1-\beta},\frac{\gamma}{1-\gamma}\right\},0<\delta<1$。

**定义 1.3** 映射 $T:D\to D$ 称为广义 $\Phi$-压缩的,如果存在实数 $1>L>0$ 及严格增加的连续函数 $\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 且 $\Phi(0)=0$ 使得对 $D$ 中的每一对 $x,y$ 均有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant L\|x-y\|+\Phi(\|x-Tx\|) \tag{5}$$

**收稿日期**:2009-05-05
**作者简介**:王亚宁 男 1978 年出生 助教

目的是讨论并研究关于广义 $\Phi$-压缩映射 Mann 迭代序列,Ishikawa 迭代序列以及 Noor 迭代序列收敛于不动点的等价性。该结果改进和推广了已知的相关的结果,为此,引入下面引理。

**引理 1.4**[5]　设$\{A_n\}$,$\{B_n\}$是两个非负实数序列,且满足不等式 $A_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)A_n+B_n,\lambda\in(0,1)$,若 $B_n=o(\lambda_n)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$。

## 2　主要成果

**定理 2.1**　设 $E$ 是任意实 Banach 空间,$D$ 是 $E$ 的一个非空闭凸子集,$T:D\to D$ 是广义 $\Phi$-压缩映射并且 $F(T)\neq\varphi$。假设$\{u_n\}_n^{\infty}=0$ 为 Mann 迭代(1),$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 Noor 迭代(3),其中 $u_0,z_0\in D$,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}\subseteq[0,1]$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$。则以下结论是等价的:

(1)Mann 迭代收敛于 $T$ 的不动点;

(2)Noor 迭代收敛于 $T$ 的不动点。

证明　设 $q$ 为 $T$ 的不动点。(1)⇒(2)　已知$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-q\|=0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n-q\|=0$。

运用式(1),式(3),得

$$\begin{aligned}\|z_{n+1}-u_{n+1}\|&=\|(1-\alpha_n)z_n+\alpha_nTw_n-(1-\alpha_n)u_n-\alpha_nTu_n\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)\|z_n-u_n\|+\alpha_n\|Tw_n-Tu_n\|\end{aligned}\tag{6}$$

令 $x=u_n,y=w_n$。由定义 1.3,得 $\|Tw_n-Tu_n\|\leqslant L\|w_n-u_n\|+\Phi(\|u_n-Tu_n\|)$。代入式(6)得

$$\begin{aligned}\|z_{n+1}-u_{n+1}\|&\leqslant(1-\alpha_n)\|z_n-u_n\|+L\alpha_n\|w_n-u_n\|+\alpha_n\Phi(\|u_n-Tu_n\|)=\\&(1-\alpha_n)\|z_n-u_n\|+L\alpha_n\|w_n-u_n\|+\alpha_nB_n\end{aligned}\tag{7}$$

式中,$B_n=\Phi(\|u_n-Tu_n\|)$。

继续利用式(3),得

$$\begin{aligned}\|w_n-u_n\|&=\|(1-\beta_n)z_n+\beta_nTv_n-u_n\|\leqslant(1-\beta_n)\|z_n-u_n\|+\beta_n\|Tv_n-u_n\|\leqslant\\&(1-\beta_n)\|z_n-u_n\|+\beta_n[\|Tv_n-Tu_n\|+\|u_n-Tu_n\|]\end{aligned}\tag{8}$$

令 $x=u_n,y=v_n$。由定义 1.3,得

$$\|Tv_n-Tu_n\|\leqslant L\|v_n-u_n\|+\Phi(\|u_n-Tu_n\|)\tag{9}$$

将式(8)代入式(7)得

$$\begin{aligned}\|w_n-u_n\|&\leqslant(1-\beta_n)\|z_n-u_n\|+\beta_n[L\|v_n-u_n\|+\Phi(\|u_n-Tu_n\|)+\|u_n-Tu_n\|]=\\&(1-\beta_n)\|z_n-u_n\|+L\beta_n\|v_n-u_n\|+\beta_n[A_n+B_n]\end{aligned}\tag{10}$$

式中,$A_n=\|u_n-Tu_n\|$。而且 $A_n,B_n\to0(n\to\infty)$。事实上,

$$A_n=\|u_n-Tu_n\|\leqslant\|u_n-q\|+\|Tu_n-Tq\|\tag{11}$$

令 $x=q,y=u_n$。由 $T$ 是广义的 $\Phi$-压缩映射得

$$\|Tu_n-Tq\|\leqslant L\|u_n-q\|+\Phi(0)=L\|u_n-q\|\tag{12}$$

将式(11)代入式(10)得

$$A_n=\|u_n-Tu_n\|\leqslant(1+L)\|u_n-q\|\to0(n\to\infty)\tag{13}$$

又因为 $\Phi$ 在$[0,+\infty)$是连续函数且 $\Phi(0)=0$,所以 $B_n=\Phi(A_n)\to0(n\to\infty)$。

下面再次利用式(3),得

$$\begin{aligned}\|v_n-u_n\|&=\|(1-\gamma_n)z_n+\gamma_nTz_n-u_n\|\leqslant(1-\gamma_n)\|z_n-u_n\|+\gamma_n\|Tz_n-u_n\|\leqslant(1-\gamma_n)\|z_n-u_n\|+\\&\gamma_n[\|Tz_n-Tu_n\|+\|u_n-Tu_n\|]=(1-\gamma_n)\|z_n-u_n\|+\gamma_n[\|Tz_n-Tu_n\|+A_n]\end{aligned}\tag{14}$$

设 $x=u_n,y=z_n$。应用定义 1.3,有

$$\|Tz_n-Tu_n\|\leqslant L\|z_n-u_n\|+\Phi(\|u_n-Tu_n\|)=L\|z_n-u_n\|+B_n\tag{15}$$

将式(14)代入式(13)得

$$\|v_n-u_n\|\leqslant(1-\gamma_n+\gamma_nL)\|z_n-u_n\|+\gamma_n(B_n+A_n)\leqslant\|z_n-u_n\|+\gamma_n(A_n+B_n)\tag{16}$$

将式(15)代入式(9)得

$$\|w_n-u_n\|\leq(1-\beta_n)\|z_n-u_n\|+L\beta_n(\|z_n-u_n\|+\gamma_n(A_n+B_n))+\beta_n(A_n+B_n)\leq \|z_n-u_n\|+(L\beta_n+\gamma_n)(A_n+B_n) \tag{17}$$

将式(16)代入式(6)得

$$\|z_{n+1}-u_{n+1}\|\leq(1-\alpha_n+L\alpha_n)\|z_n-u_n\|+L\alpha_n(L\beta_n+\gamma_n)(A_n+B_n)+\alpha_nB_n\leq (1-(1-L)\alpha_n)\|z_n-u_n\|+\sigma_n \tag{18}$$

式中,$\sigma_n=L\alpha_n(L\beta_n+\gamma_n)(A_n+B_n)+\alpha_nB_n=o(\alpha_n)$。式(17)满足引理 1.4 的条件,应用引理 1.4 得,$\|z_n-u_n\|\to0(n\to\infty)$。再由不等式 $0\leq\|z_n-q\|\leq\|z_n-u_n\|+\|u_n-q\|$ 得:$\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n-q\|=0$。

关于(2)⇒(1)。已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n-q\|=0$,要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-q\|=0$。设 $\beta_n=\gamma_n=0$,则 Noor 迭代序列就是 Mann 迭代序列,因此,结论成立。

**定理 2.2** 设 $E$ 是任意实 Banach 空间,$D$ 是 $E$ 的一个非空闭凸子集,$T:D\to D$ 是广义 $\Phi$-压缩映射并且 $F(T)\neq\varphi$。令 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 Mann 迭代,$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 Ishikawa 迭代,其中,$u_0,x_0\in D$,$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subseteq[0,1]$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,则以下结论是等价的:

(1)Mann 迭代收敛于 $T$ 的不动点;

(2)Ishikawa 迭代收敛于 $T$ 的不动点。

注:定理 2.1 和定理 2.2 分别推广并改进文献[1]和[3]中的相关结果。

## 参 考 文 献

[1]Mann W R. Mean value methods in iteration[J]. Proc. Amer. Math. Soc, 1953, 4: 506-510.

[2] Ishikawa S. Fixed points by a new iteration method[J]. Proc. Amer. Math. Soc, 1974, 44: 147-150.

[3]Xue Zhiqun. Remarks of equivalence among Picard, Mann and ishikawa iteration in normed spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2007, 2:1-5.

[4]Zamfirescu T. Fixed point theorems in metric space[J]. Archiv der Mathamatik, 1972,23 : 292-298.

[5]Soltuz S M. The equivalence of Picard, Mann and Ishikawa iterations dealing with quasi-contractive operators[J]. Math. Comm, 2005, 10: 81-88.

# The Equivalence of Iterative Sequences Convergence for a Class of Nonlinear Mappings

**Wang Yaning**

(Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract**: In arbitrary Banach spaces, it is shown that the convergence of Mann iteration is equivalent to Noor iteration sequence, and the convergence of Mann iteration is equivalent to Ishikawa iteration sequence for generalized-contractive mappings. These results extend and improve corresponding results of S. M. Soltuz in 2005, Xue Zhiqun in 2007 and others.

**Key words**: generalized-contractive mappings; fixed point; Noor iteration sequence; Mann iteration sequence; Ishikawa iteration sequence