

随动有限元法—非线性壳单元

安 新, 钱若军, 王人鹏

(同济大学 建筑工程系, 上海 200092)

摘要:推导了壳单元的随动有限元方程,详细论述了通过随动有限元方程将线性壳单元应用到几何非线性分析中的过程。通过将具有面内转动自由度的膜单元与 DKT 薄板单元组合,构建了一个线性的三角形平板壳单元,并基于推导的随动有限元方程,成功的构建了节点具有六个自由度的新型非线性壳单元,通过数值算例验证了这一单元的准确性,也证明了给出的随动有限元方程的正确性。

关键词:随动有限元法;几何非线性;壳单元;转动自由度;膜单元

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-0300(2009)03-0014-07

有限元中的随体转动方程是由 Wempner^[1]于 1969 年、Belytschko^[2]及其合作者于 1973 年引入到有限元及相关文献中的。从 20 世纪 80 年代开始,这一方法得到了进一步的发展,并且在这一时期不再对结构采用统一的随动参考坐标系,而是将随动坐标系的概念应用到结构离散后的每个单元中,切线刚度矩阵的连续性也得到了满足^[3-7]。Crisfield^[8,9]在他的著作中详细的论述了随动有限元中的有关转动参数的更新和随动梁单元的构建过程。Felippa 和 Haugen^[10]、Pacoste 和 Battini^[11,12]等对随动有限元法的基本理论进行了总结,讨论了随动构型的选择,并将随动有限元法应用到结构稳定问题的分析中。

随动有限元法的基本思想是:将结构受外荷载作用后所产生的位移分解为“刚体位移”和“变形位移”,并且对离散后的每个单元定义一个随着单元不运动的参考构型,通过这一参考构型将结构的“变形位移”提取出来,相对于这一参考构型,由于已经剔除了结构的刚体位移,其“变形位移”很小,那么线性分析中的基本假设就可以应用到其中,可以用线性单元来构建相对于参考构型的局部切线刚度矩阵。

对于刚体位移的提取过程,只要单元具有相同的形状和节点自由度,那么这一过程是通用的,这就避免了应用常规的有限元法推导几何非线性单元时,不同的单元需要不同的切线刚度矩阵的情形,并且由于“小变形”的假设,随动有限元法可以将线性单元直接用于单元局部切线刚度矩阵的构建中,简化了单元构建和推导过程,使大量现有的线性单元可以得到重新的利用。现有的通用有限元软件中,构建单元库是一个非常繁琐的过程,将随动有限元法应用到其中,就不需要构建额外的几何非线性单元库,一方面节省了大量的人力和时间,同时又可以使大量现有的优良的线性单元得到应用,确保了数值计算的精度,这使得随动有限元法越来越受到学者们的重视,并且不断得到发展和改进的很重要的原因,也是随动有限元相对于常规的非线性有限元的优势所在。

论述了随动壳单元有限元方程的推导过程,给出了六自由度的随动壳单元有限元方程的通用形式,通过这一通用形式的方程构建出了一个节点具有六个自由度的用于几何非线性分析的新型三角形平板壳单元,通过数值算例验证了这一单元的精度,也证明了给出的随动有限元方程的正确性。

2 随动坐标描述中的运动学

2.1 随动坐标描述中的构型

收稿日期:2009-05-31

作者简介:安新 男 1978 年出生 博士研究生

基金项目:国家自然科学基金项目(50638050)

在随动坐标描述中,根据结构变形前后的不同状态,可分为三种构型:初始构型、随体构型、变形构型,如图1所示。

初始构型是指结构初始状态下的构型,一般指没有发生变形时的构型;随动构型就是指结构发生刚体转动和平动后未变形时的构型;变形构型是指结构发生变形后的形状。

2.2 坐标系

坐标系是对构型进行空间定位的,与构型无关,不同的构型可以采用同一坐标系描述,但是往往为了计算方便,通过选择恰当的局部坐标系,达到简化几何关系的目的。

在随动坐标描述中针对不同的构型,采用不同的局部坐标系,它主要有三种坐标系:初始坐标系、随动坐标系和整体坐标系。对于初始构型,定义一初始坐标系来描述;对于随动构型,定义一个随着结构变形不断运动着的随动坐标系来描述;初始坐标系、随动坐标系之间通过整体坐标系进行关联。

2.3 转动矩阵

一个矢量 r_0 发生刚体转动到 r_n ,则由文献[9]的推导,可得 r_0 与 r_n 之间的转换关系为

$$r_n = R r_0 \quad (1)$$

式中, R 为转动矩阵,其表达式为

$$R = \left[I_3 + \frac{\sin \theta}{\theta} S(\theta) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} S(\theta) S(\theta) \right] = e^{S(\theta)} \quad (2)$$

式中, θ 为转角虚矢量; θ 为这一转动虚矢量的模; $S(\theta)$ 为反对称矩阵,其表达式为

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

转动矩阵 R 与坐标转换矩阵 T 之间的关系为^[9]

$$R = T^T \quad (4)$$

2.4 变形位移

2.4.1 平动位移

如图1所示,基本构型中的任意一点 P_0 在发生位移后到达新的位置 P_D ,设随动坐标系与整体坐标系之间的转换矩阵为 T ,则点 P 的变形位移在随动坐标系下可以表达为

$$u_{dP} = T(x_P^0 + u_P - C_0 - u_0) - x_{Pc}^R \quad (5)$$

由式(4)所示的关系可得

$$u_{dP} = R^T(x_P^0 + u_P - C_0 - u_0) - x_{Pc}^R \quad (6)$$

式中, $u_{dP} = [u_{dP} \quad v_{dP} \quad w_{dP}]^T$ 为在随动坐标系描述的位移; x_P^0 为在初始坐标系中 P 点的位置矢量,由于随动坐标系选用正交笛卡尔坐标系,所以这一矢量在发生刚体转动后,具有不变的性质,因此, $x_{Pc}^R = x_{Pc}^0$ 。

2.4.2 转动

由结构变形前后的几何关系可知,任意一点的转动可以用其三元矩阵(相互正交的三个坐标轴在整体坐标系下方向矢量所组成的矩阵)的转动来描述,结构未发生变形时,其任意两点之间没有相对的转动,结构任意点的三元矩阵都相同。当结构发生变形,由于结构中任意两点之间发生了相对的运动,三元矩阵也随之发生变化,则结构任意一点的变形转动就可以通过结构变形后任意一点的三元矩阵相对于随动坐标系的坐标轴的转动来获得。如图2所示,初始构型中的点 P_0 运动到点 P 时,其三元矩阵的转动可以用矩阵 R_P^s 来描述,整体坐标系转动到初始坐标系的转动矩阵为 R_0 ,则初始构型中点发生转动后,其三元矩阵的转动相对于整体坐标系可以表达为

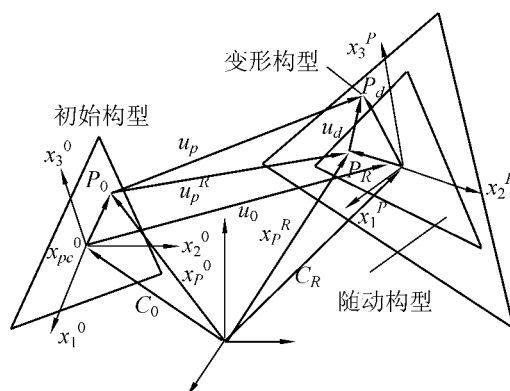


图1 随动坐标描述中的构型

$$T_P = R_P^g T_o \quad (7)$$

式(7)中的转换也可以通过另一种方式获得,将整体转动矩阵转换到随动坐标系下,然后再转动到 P 点当前的三元矩阵,则有

$$T_P = \bar{R}_P^g R_r \quad (8)$$

由式(7)和(8)可得

$$\bar{R}_P^g = R_r^T R_P^g R_o \quad (9)$$

式(9)中, $\bar{R}_P^g$ 是相对于随动坐标系的,它由随动构型中的 P' 点转动到变形构型中的 P 点所发生的刚体转角 $\bar{\vartheta}_P$ 构成的,由上面的论述可知, $\bar{\vartheta}_P$ 即为点 P' 相对于随动坐标系所发生的变形转角。通过利用转动矩阵的性质,并利用式(2)所示的关系,可以求得这一变形转角

$$S(\bar{\vartheta}_P) = \log_e(R_r^T R_P^g R_o) \quad (10)$$

2.4.3 可叠加转角和不可叠加转角

由转动矩阵的定义可知,转动虚矢量之间是不能直接叠加的

$$R(\theta + \delta\theta) \neq R(\theta)R(\delta\theta) \quad (11)$$

为了引入有限元方程的需要,要找寻与 $R(\theta)R(\delta\theta)$ 等价的转动关系,使下式得到满足

$$R(\theta)R(\delta\theta) = R(\theta + \delta\theta) \quad (12)$$

由文献[9]的论述可知,这一可叠加转动是存在的,并且 $\delta\theta$ 与 $\delta\vartheta$ 之间的关系可以表达为

$$\delta\vartheta = H(\theta)\delta\theta \quad (13)$$

式(13)中,

$$H(\theta) = \left\{ \frac{\sin \theta}{\theta} I + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \theta \theta^T + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right]^2 S(\theta) \right\} \quad (14)$$

3 六自由度线性三角形平板壳单元

这里选择文献[13]给出的具有面内转动自由度的膜单元和著名的 DKT^[14] 三角形薄板单元来构建线性的平板壳单元。单元具体的描述可参看相关的文献,这里不再赘述。

4 随动描述中的变分形式

将随动描述的思想应用到非线性有限元法中,需要给出相应变量的变分形式,以便于建立有限元方程。

4.1 转动矩阵及转角的变分

由于在随动坐标描述中,随动构型及在其基础上定义的坐标系是不断的转动的,它在求解过程中是不断的变化的,不是常量,所以转动矩阵也参与变分。

由文献[9],可得

$$R = \exp[S(\theta)] \Rightarrow \delta R = \delta[S(\theta)]R \quad (15)$$

其中

$$\delta S(\theta_r^g) = S(\delta\theta_r^g) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\theta_{r3}^g & \delta\theta_{r2}^g \\ \delta\theta_{r3}^g & 0 & -\delta\theta_{r1}^g \\ -\delta\theta_{r2}^g & \delta\theta_{r1}^g & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中, θ_r^g 为整体坐标系转动到随动坐标系时的转角虚矢量。

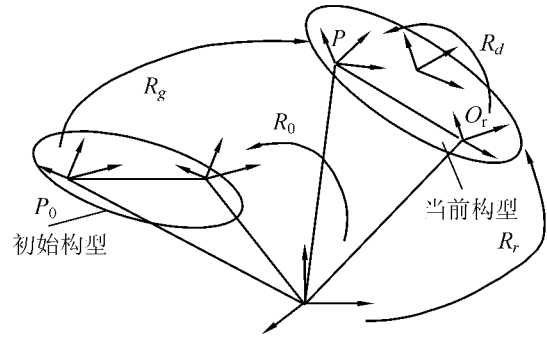


图 2 结构的变形转动

对式(9)求变分,并应用式(4)给出的关系可得

$$\delta \mathbf{R}_p^e = [\delta \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_p^e) - \delta \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_r^e)] \bar{\mathbf{R}}_p^e \quad (17)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}_r^e$ 为整体坐标系与随动坐标系之间的转角虚矢量在随动坐标系下表达的形式; $\boldsymbol{\theta}_p^e$ 为点 P_0 转动到当前构型中点 P 所需转动的空间转角在随动坐标系下的表达形式。

上述方程也可以写成如下的形式

$$\bar{\delta \boldsymbol{\theta}}_p^e = \delta \boldsymbol{\theta}_p^e - \delta \boldsymbol{\theta}_r^e \quad (18)$$

式中, $\bar{\delta \boldsymbol{\theta}}_p^e$ 为随动坐标系下度量的对结构内能有贡献的“变形”转动。由推导的过程可以看出,式(19)所给出的转角虚量 $\delta \boldsymbol{\theta}_p^e$ 为变形转动的可叠加形式。

4.2 平动位移变分

对式(8)求变分,可得

$$\delta \mathbf{u}_{dP} = \delta \mathbf{R}_r^T (\mathbf{x}_p^0 + \mathbf{u}_p - \mathbf{C}_0 - \mathbf{u}_0) + \mathbf{R}_r^T (\delta \mathbf{u}_p - \delta \mathbf{u}_0) \quad (19)$$

利用式(16),可得

$$\delta \mathbf{u}_{dR} = -\delta \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_r^e) \mathbf{R}_r^T (\mathbf{u}_p + \mathbf{r}_p^0) + (\delta \mathbf{u}_p^e - \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{u}_0) \quad (20)$$

在有限元分析中,刚体位移在应变能中不做任何的贡献,因此在变分中可以省略,所以可以忽略(20)中的 $\mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{u}_0$,式(19)变为

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u}_{dR} = -\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^e \mathbf{r}_p^e + \delta \mathbf{u}_p^e = \tilde{\mathbf{r}}_p^e \delta \boldsymbol{\theta}_r^e + \delta \mathbf{u}_p^e \\ \mathbf{r}_p^0 = \mathbf{x}_p^0 - \mathbf{C}_0 - \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (21)$$

在式(21)中,

$$\begin{cases} \mathbf{r}_p^e = \mathbf{u}_p^e + \mathbf{r}_p^0 \\ \tilde{\mathbf{r}}_p^e = \mathbf{S}(\mathbf{r}_p^e) \end{cases} \quad (22)$$

式中, $\mathbf{r}_p^e$ 为点 P 在随动坐标系下的位置矢量。

5 随动有限元方程

为了表述方便,用 $\boldsymbol{\omega}$ 来表示可叠加形式的转动虚矢量, $\boldsymbol{\theta}$ 为不可叠加的转动虚矢量,相应的上标 e 表示在随动坐标系下度量的变量, $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ 表示变形转动的可叠加形式, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ 表示变形转动的不可叠加形式。

由于单元的内力为单元应变能对于平动和转动的一阶导数,则单元的内力可以表达为

$$\mathbf{f}_a^e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}_a^e} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} \end{bmatrix} = \sum_b^{N_{nodes}} \mathbf{J}_{ab}^e \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}_a^e} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} \end{bmatrix}; \mathbf{J}_{ab}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_b^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} & \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_b^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_b^e}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} & \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_b^e}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} \end{bmatrix} \quad (23)$$

对 $\mathbf{J}_{ab}^e$ 应用复合求导法则,

$$\mathbf{J}_{ab}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_b^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_b^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_b^e}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_b^e}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_b^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_b^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_b^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_b^e} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_b^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e}{\partial \boldsymbol{\theta}_a^e} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_b^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_b^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_b^e} \end{bmatrix} \quad (24)$$

令

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_a^e) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_a^e) \end{bmatrix}; \mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_b^e) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_b^e) \end{bmatrix}; \mathbf{P}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_a^e}{\partial \mathbf{u}_b^e} & \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_a^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_b^e} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e}{\partial \mathbf{u}_b^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_b^e} \end{bmatrix} \quad (25)$$

则,雅克比矩阵的分量可以表达为

$$\mathbf{J}_{ab}^e = \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_a^e)^{-1} \mathbf{P}_{ab}^T \mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_b^e) \quad (26)$$

考虑到式(18)和(22),矩阵 $\mathbf{P}$ 可以表达为

$$\mathbf{P}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}\delta_{ab} + \text{Spin}(\mathbf{x}_a^e) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r^e}{\partial \mathbf{u}_b^e} & \text{Spin}(\mathbf{x}_a^e) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r^e}{\partial \boldsymbol{\omega}_b^e} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r^e}{\partial \mathbf{u}_b^e} & \mathbf{I}\delta_{ab} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r^e}{\partial \boldsymbol{\omega}_b^e} \end{bmatrix} = \mathbf{I}\delta_{ab} - \boldsymbol{\psi}_a \boldsymbol{\Gamma}_b \quad (27)$$

式中,

$$\boldsymbol{\psi}_a = \begin{bmatrix} -\text{Spin}(\mathbf{x}_a^e) \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r^e}{\partial \mathbf{u}_b^e} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r^e}{\partial \boldsymbol{\omega}_b^e} \end{bmatrix}^T \quad (28)$$

写成矩阵形式,对于三角形壳单元,可以表达为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \\ \boldsymbol{\Psi}_3 \end{bmatrix} [\boldsymbol{\Gamma}_1^T \quad \boldsymbol{\Gamma}_2^T \quad \boldsymbol{\Gamma}_3^T] \quad (29)$$

由式(30)可得,变形位移的变分表达式为

$$\delta \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{P} \delta \mathbf{d}^e \quad (30)$$

式中,

$$\begin{cases} \delta \bar{\mathbf{d}}^e = [\delta \bar{\mathbf{u}}_1^e & \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1^e & \delta \bar{\mathbf{u}}_2^e & \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_2^e & \delta \bar{\mathbf{u}}_3^e & \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_3^e]^T \\ \delta \mathbf{d}^e = [\delta \mathbf{u}_1^e & \delta \boldsymbol{\theta}_1^e & \delta \mathbf{u}_2^e & \delta \boldsymbol{\theta}_2^e & \delta \mathbf{u}_3^e & \delta \boldsymbol{\theta}_3^e]^T \end{cases} \quad (31)$$

利用复合求导法则,可以给出

$$\mathbf{f}^e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{P}^T \mathbf{f}^e(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}) \quad (32)$$

由于

$$\delta \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{P} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^g \quad (33)$$

式中, $\mathbf{G}$ 为 18×18 的矩阵,将其分块后,其对角线上的矩阵为随动坐标系的转动矩阵 $\mathbf{R}_r$ 。通过应用虚功原理,整体坐标系下的内力与局部坐标下的内力之间的关系可以表达为

$$\mathbf{f} = \mathbf{G} \mathbf{P} \bar{\mathbf{f}} \quad (34)$$

则整体坐标系下的内力和局部随动坐标系中的内力之间的变分关系可以表达为

$$\delta \mathbf{f}^g = \mathbf{G} \mathbf{P}^T (\delta \bar{\mathbf{f}}^e) + \mathbf{G} (\delta \mathbf{P}^T) \bar{\mathbf{f}}^e + (\delta \mathbf{G}) \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{f}}^e \quad (35)$$

式中,

$$\begin{cases} \mathbf{G} \mathbf{P}^T (\delta \bar{\mathbf{f}}^e) = \mathbf{G} \mathbf{P}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \delta \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{G} \mathbf{P}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}^e) \mathbf{P} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^g \\ \mathbf{G} (\delta \mathbf{P}^T) \bar{\mathbf{f}}^e = -\mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{d}^e = -\mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{P} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^g \\ (\delta \mathbf{G}) \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{f}}^e = -\mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{I}}^T \delta \mathbf{d}^e = -\mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{I}}^T \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^g \end{cases} \quad (36)$$

式(36)中,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{F}}^T = [\mathbf{S}(\mathbf{n}_1^e) & 0_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{n}_2^e) & 0_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{n}_3^e) & 0_{3 \times 3}] \\ \tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{S}(\mathbf{n}_1^e) & \mathbf{S}(\mathbf{m}_1^e) & \mathbf{S}(\mathbf{n}_2^e) & \mathbf{S}(\mathbf{m}_2^e) & \mathbf{S}(\mathbf{n}_3^e) & \mathbf{S}(\mathbf{m}_3^e)]^T \end{cases} \quad (37)$$

式(37)中,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_a^e = [\mathbf{f}_a^e(1) & \mathbf{f}_a^e(2) & \mathbf{f}_a^e(3)]^T \\ \mathbf{m}_a^e = [\mathbf{f}_a^e(4) & \mathbf{f}_a^e(5) & \mathbf{f}_a^e(6)]^T \end{cases} \quad (38)$$

式中, $\mathbf{f}_a^e(i)$ 为局部坐标系节点 α 的第 i 个内力。

式(37)及(38)的推导中,用到了反对称矩阵的性质

$$\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\mathbf{S}(\mathbf{b})\mathbf{a} \quad (39)$$

式中, $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 为任意矢量。

最后,整体坐标系下的切线刚度矩阵可以表达为

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}[\mathbf{P}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}}^e, \bar{\boldsymbol{\omega}}^e) \mathbf{P} - \mathbf{I} \mathbf{F}^T \mathbf{P} - \bar{\mathbf{F}} \mathbf{I}^T] \mathbf{G}^T \quad (40)$$

6 数值算例

如图3所示的以圆柱壳,采用无量纲形式,其半径为1,长度为3,一端受到完全约束,其弹性模量为: 2.0685×10^6 ; 泊松比为:0.3;厚度为:0.03。如图所示,直径两端施加对方向相反,数量等的集中力,采用 32×16 的网格划分,圆柱壳中A点的荷载位移曲线如图所示4。

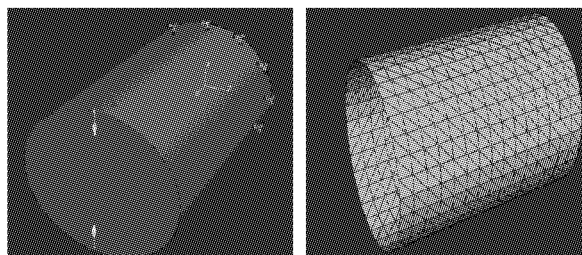


图3 圆柱壳模型

7 结论

通过数值算例可以看出,给出的将线性单元应用到非线性分析的程式的正确性。算例中给出的半径为1,而在荷载为600时,用文中方法仍可以得到收敛的结果,其位移值为0.63,属于大位移问题的范畴,因此可以看出,给出的分析方法也适用大位移问题的分析。通过给出的框架性的有限元方程,可以非常方便的将线性单元应用到非线性问题的分析中,这避免了繁琐的非线性单元推导过程,节省了单元构建的时间。

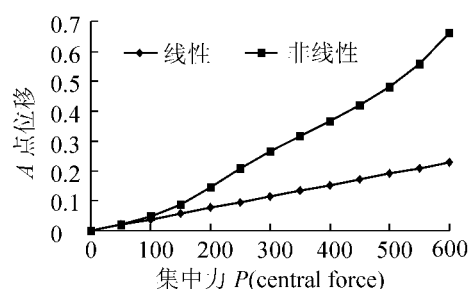


图4 A点位移-集中力曲线

参 考 文 献

- [1] Wempner G A. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells[J]. Int. J. Solids Struc, 1969, 5: 117-153.
- [2] Belytschko T, Hsieh B J. Nonlinear transient finite element analysis with convected coordinates [J]. Int. J. Numer. Methods Engrg, 1973, 7: 255-271.
- [3] Rankin C C, Brogan F A. An element-independent corotational procedure for the treatment of large rotations[J]. ASME J. Pressure Vessel Technology, 1986, 108: 165-174.
- [4] Rankin C C, Consistent linearization of the element-independent corotational formulation for the structural analysis of general shells[M]. Washington, D. C. :1988.
- [5] Rankin C C, Nour-Omid B. The use of projectors to improve finite element performance[J]. Computers & Structures, 1988, 30: 257-267.
- [6] Bergan P G, Nygård M K. Nonlinear shell analysis using Free Formulation finite elements[C]. Berlin:Springer - Verlag,1989: 317-338.
- [7] Nour-Omid B, Rankin C C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors[J]. Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg. , 1991,93:353-384.
- [8] Crisfield M A. A consistent co-rotational formulation for nonlinear three-dimensional beam element[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , 1990, 81: 131-150.
- [9] Crisfield M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures; advanced topics (Vol. 2.) [M] . New York;Wiley, 1996.
- [10] Felippa C A, Haugen B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements; I. Theory[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. ,2005, 194: 2285-2335.
- [11] Costin Pacoste. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1998,156: 75-110.
- [12] Jean-Marc Battini, Costin Pacoste. On the choice of local element frame for corotational triangular shell elements[J]. Commun. Numer. Meth. Engrg, 2004,20: 819-825.

(下转第24页)

参 考 文 献

- [1]雷晓燕,圣小珍. 铁路交通噪声与振动[M]. 北京:科学出版社,2004.
- [2]祁宝金. 钢轨平直度测量仪的研制[J]. 机械工程师,2006(8):115-117.
- [3]王济,胡晓. MATLAB 在振动信号处理中的应用[M]. 北京:知识产权出版社,2006.
- [4]同济大学道路与交通工程教育部重点实验室. 轨道交通焊接接头状态调查研究[R]. 上海:同济大学道路与交通工程教育部重点实验室,2009.

Research and Analysis on Welded Joint Irregularity in Urban Mass Transit System

Li Qiuling, Lian Songliang

(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education,
Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Based on the field-measured data of rail transit lines, the irregularity shape and distribution of the welded joints are analyzed. Programming with Matlab is applied to analyze one-third octave in order to study the law of short-wave irregularity distribution, which is significant for further research on wheel-rail contact force and rolling noise. The analysis results show that the measured welded joints with irregularity amplitude of 0.1 ~ 0.6 mm are in the majority, the convex shaped welded-joint irregularity is more serious than the concave shaped one, and the wavelength of short-wave irregularity mainly ranges from 0.08 m to 0.2 m.

Key words: rail transit; welded joints; irregularity; one-third octave band

~~~~~  
(上接第 19 页)

- [13] Long Yuqiu, Xu Yin. Generalized conforming triangular membrane element with vertex rigid rotational freedom[J]. Finite element in Analysis and Design, 1994, 17: 259-271.
- [14] Batoz J L, Bathe K J, Ho L W. A study of three-node triangular plate bending elements [J]. Int. J. Numer. Meth. Engng., 1980, 15: 1771-1812.

## Corotational Finite Element Method—Nonlinear Shell Element

An Xin, Qian Ruojun, Wang Renpeng

(Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The co-rotational finite element formulation for triangular flat shell element is derived in this paper, and the procedure applying linear element to nonlinear analysis through this formulation is also discussed in detail. The triangular flat shell element, which combines a membrane element with drilling freedom and DKT thin plate element, is constructed. By using this linear shell element and the co-rotational finite element formulation derived in this paper, a new shell element with six freedoms each node which can be used for geometry nonlinear analysis is given. Numerical results are presented to demonstrate the efficiency and accuracy of this new shell element, and the correctness of the co-rotational formulation is also proved.

**Key words:** co-rotational finite element method; geometry nonlinear; shell element; drilling freedom; membrane element