第 33 卷 第 1 期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 1
2020 年 3 月 Journal of Shijiazhuang Tiedao University(Natural Science Edition) Mar. 2020

一类含分数阶微积分时滞微分方程的解的指数估计

鲍志超， 牛江川， 申永军， 杨绍普

(石家庄铁道大学 机械工程学院,河北 石家庄 050043)

摘要:研究分数阶时滞微分方程的解的存在唯一性具有重要的理论意义。针对基于电流环分数阶 PID 控制的永磁同步电机,建立了考虑时滞现象的控制系统的理论模型,得到了一类含时滞分数阶项的微分方程。研究了此类微分方程的解的存在唯一性和指数估计。利用分步法证明了此类微分方程的解的存在唯一性;利用广义 Gronwall 不等式,推导了此类微分方程的解的指数估计,为研究此类方程的解析解提供了理论基础。

关键词:时滞;分数阶 PID 控制;指数估计;永磁同步电机

中图分类号: O175.7 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-0373(2020)01-0068-06

0 引言

分数阶微积分建模已经广泛应用于生物学、力学、控制等众多领域[1-2]。由于分数阶控制比整数阶控制能取得更好的控制效果,越来越多地被应用于实际控制中[3]。在控制系统进行闭环反馈控制时,系统中不可避免的存在时滞[4],而且时滞现象的存在会在一定程度上影响受控系统的稳定性。时滞系统广泛存在于各个工程领域,因此吸引了众多学者的关注。胡海岩等[5]从动力学的角度对时滞动力系统的研究进展进行了综述。王在华等[6]还综述了时滞动力系统稳定性与分岔方面的研究进展。张舒等[7]对耦合时滞诱发的动力学研究进展进行了综述。

在分数阶控制系统中,研究分数阶微分方程的解析解或近似解析解具有重要的理论意义。而分数阶微分方程解的存在唯一性是研究方程解析解或近似解析解的前提[8]。蒋威[9-10]研究了退化时滞微分系统的可解性,给出了通解形式,推导并证明了解的指数估计。刘可为等和 Zhang X[11-12]证明了分数阶线性时滞微分系统的解存在且唯一,并推导了在有限区间内解的指数估计,给出了此类微分方程的通解形式。本文对基于电流环分数阶 PID 控制的永磁同步电机进行分析和建模,得到一类含分数阶微积分的时滞微分方程。对此类时滞微分方程的解的存在唯一性进行证明,并利用广义的 Gronwall 不等式[13],给出了解的指数估计的形式。

1 准备知识

定义 1:设 $f(t)\in C[a,\infty)$,实数 $\beta>0$,当 $t>a$ 时,可积函数 $f(t)$ 的 β 阶 Riemann-Liouville 积分表示为

$$ {}_aD_t^{-\delta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_a^t(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

定义 2:设 $0\leqslant n-1<\alpha<n$,$n\in\mathbf{N}$,$f(t)$ 是 n 阶连续可导函数,$f(t)$ 的 α 阶 Caputo 导数表示为

$$ {}_aD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \tag{2}$$

收稿日期:2018-09-01 **责任编辑**:车轩玉 DOI:10.13319/j.cnki.sjztddxxbzrb.20180901001

基金项目:国家自然科学基金(11872254);河北省自然科学基金(E2018210056)

作者简介:鲍志超(1991—),男,硕士研究生,研究方向为机械系统动力学。E-mail:396178417@qq.com

鲍志超,牛江川,申永军,等.一类含分数阶微积分时滞微分方程的解的指数估计[J].石家庄铁道大学学报:自然科学版,2020,33(1):68-73.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

引理 1:设 $x(t)\in R^n$ 是下列方程的解

$$\begin{cases}\dot{x}=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}x(t-\tau)+f(t) & t\geqslant 0\\ x(0)=\varphi & -\tau\leqslant t\leqslant 0\end{cases} \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,$x(t),f(t),\varphi\in\boldsymbol{R}^n$。

根据文献[9]可知方程存在唯一解

$$x(t)=\varphi+\int_0^t[\boldsymbol{A}x(s)+\boldsymbol{B}x(s-\tau)+f(s)]\mathrm{d}s \tag{4}$$

引理 2(Gronwall 不等式):$u(t),\alpha(t)$是在区间$[a,b]$上的连续实值函数,$\beta(t)\geqslant 0$ 而且在$[a,b]$上是可积函数,若

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)u(s)\mathrm{d}s\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{5}$$

则有

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)\left[\exp\int_s^t\beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{6}$$

如果 $\alpha(t)$还是非减函数,则有

$$u(t)\leqslant\alpha(t)\exp\left[\int_a^t\beta(s)\mathrm{d}s\right]\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{7}$$

引理 3:函数 $f(t)=at^{1-\alpha}+bt^{1+\delta}-a(1-\tau)^{1-\alpha}-b(t-\tau)^{1+\delta}-a\tau^{1-\alpha}+b\tau^{1+\delta}$在区间$[\tau,+\infty]$上存在最小值 $f(\tau)=0$。其中 $a>0,b>0,0<\alpha<1,0<\delta<1$ 。

证明

$$f'(t)=a(1-\alpha)[t^{-\alpha}-(t-\tau)^{-\alpha}]+b(1+\delta)[t^{\delta}-(t-\tau)^{\delta}] \tag{8}$$

(1)$0<\tau<1$,当 $t\in[\tau,1]$时,$f'(t)<0$,函数递减;当 $t\in[1,+\infty)$时,$f'(t)>0$,函数递增。在区间$[\tau,+\infty)$上存在极小值 $f(\tau)=0$。

(2)$1<\tau$,当 $t\in[\tau,+\infty]$时,$f'(t)>0$,函数递增。在区间$[\tau,+\infty)$上存在最小值 $f(\tau)=0$。证毕。

2　永磁同步电机时滞分数阶 PID 控制建模

2.1　永磁同步电机矢量模型

永磁同步电机矢量控制的核心思想是将电机的三相电流、电压、磁链经过 Clake 坐标变换和 Park 坐标变换变到以转子磁链定向的两相参考 dp 坐标系。其中定子电流经变换被分解为相互正交的 2 个分量:一个分量与磁链方向相同,代表了定子电流的励磁分量;另一个分量与磁链方向正交,代表了定子电流的转矩分量。矢量控制就是维持定子电流的励磁分量不变,控制其转矩分量,这种控制方式类似于直流电机控制中维持励磁电流不变,通过控制电枢电流来控制电机的转矩。矢量控制方法能使系统具有较好的动态特性。

有关参数如表 1 所示。

表 1　永磁同步电机有关参数

极对数	交轴电感/mH	直轴电感/mH	定子电阻/Ω	转子磁链/Wb
2	20	20	1.4	0.24

永磁同步电机的矢量控制模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i_d}{\mathrm{d}t}=\dfrac{R_s}{L_d}i_d+\dfrac{2\pi L_q}{L_d}ni_q+\dfrac{1}{L_d}u_d\\ \dfrac{\mathrm{d}i_q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi L_q}{L_q}ni_d-\dfrac{R_s}{L_q}i_q+\dfrac{1}{L_q}u_q-\dfrac{2\pi\psi_f}{L_q}n\\ \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{R_\Omega}{J}n+\dfrac{P_n^2}{2\pi J}[\psi_f i_q+(L_d-L_q)i_di_q]-\dfrac{P_n}{2\pi}T_l\end{cases} \tag{9}$$

式中,R_s、R_Ω、L_d、L_q、ψ_f、J、P_n 分别为定子电阻、电机阻尼系数、直轴电感、交轴电感、定子磁链、电机转动

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

惯量、极对数。

2.2 时滞分数阶 PID 控制

永磁同步电机电流环控制原理如图 1 所示,控制对象包括 PWM(脉冲宽度调制)逆变器(包括 PWM 信号形成、延时、隔离驱动及逆变器)、永磁同步电机的电枢回路、电流采样和滤波电路。

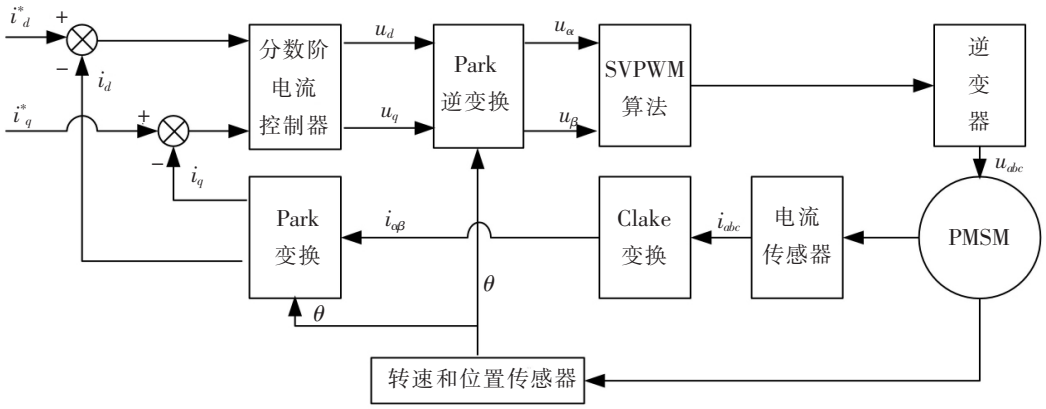

图 1 电流环控制原理图

永磁同步电机的数字伺服控制系统存在固有延时,系统的固有延时包括 PWM 逆变器延时(T_{pwm}),电流采样延时,滤波电路延时等。其中起主导作用的延时包括采样延时和逆变器输出延时,这 2 种延时决定于数字伺服系统所应用的采样方式及 PWM 占空比的更新方式。

在伺服控制系统应用中,有 2 种电流采样时序方式:单次采样单次更新占空比方式(SSSU)以及双次采样双次更新占空比方式(DSDU)。其中 SSSU 方式根据采样时刻的不同又有 2 种采样模式,载波周期中点时刻采样与载波周期起始时刻采样,分别记为 SSSUM1 模式和 SSSUM2 模式。

根据平均值等效原则,永磁同步电机伺服控制系统的 3 种固有延时分别为:SSSUM1 模式的延时 $\tau_1=2T_{\mathrm{pwm}}$,SSSUM2 模式的延时 $\tau_2=1.5T_{\mathrm{pwm}}$,DSDU 方式的延时 $\tau_3=0.75T_{\mathrm{pwm}}$。

控制系统采用电压型逆变器控制,i_d^* 和 i_q^* 为给定直交轴电流,逆变器电压放大倍数 $K=15.5$,电流反馈系数 $\beta=0.6$,分数阶 PID 控制器输出电压为

$$\begin{cases} u_d = K\left\{K_p[i_d^* - \beta i_d(t-\tau)] + K_{i,t-2\tau}D_{t-\tau}^{-\delta}[i_d^* - \beta i_d(t)] + K_{dt-2\tau}D_{t-\tau}^{\alpha}[i_d^* - \beta i_d(t)]\right\} \\ u_q = K\left\{K_p[i_q^* - \beta i_q(t-\tau)] + K_{i,t-2\tau}D_{t-\tau}^{-\delta}[i_q^* - \beta i_q(t)] + K_{dt-2\tau}D_{t-\tau}^{\alpha}[i_q^* - \beta i_q(t)]\right\} \end{cases} \tag{10}$$

整理得电流环分数阶 PID 控制的数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} i_d^* - \beta i_d \\ i_q^* - \beta i_q \end{bmatrix} + \boldsymbol{A}_{t-2\tau}\boldsymbol{D}_{t-\tau}^{\alpha}\begin{bmatrix} i_d^* - \beta i_d(t-\tau) \\ i_q^* - \beta i_q(t-\tau) \end{bmatrix} = -\boldsymbol{B}\begin{bmatrix} i_d^* - \beta i_d \\ i_q^* - \beta i_q \end{bmatrix} - \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} i_d^* - \beta i_d(t-\tau) \\ i_q^* - \beta i_q(t-\tau) \end{bmatrix} - \boldsymbol{E}_{t-2\tau}\boldsymbol{D}_{t-\tau}^{-\delta}\begin{bmatrix} i_d^* - \beta i_d(t-\tau) \\ i_q^* - \beta i_q(t-\tau) \end{bmatrix} + \boldsymbol{F} \tag{11}$$

式中,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{KK_d}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{KK_d}{L_q} \end{bmatrix}$;$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \frac{R_s}{\beta L_d} & -\frac{2\pi L_q n}{\beta L_d} \\ \frac{2\pi L_d n}{\beta L_q} & \frac{R_s}{\beta L_q} \end{bmatrix}$;$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \frac{KK_p}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{KK_p}{L_q} \end{bmatrix}$;$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} \frac{KK_i}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{KK_i}{L_q} \end{bmatrix}$;

$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} \frac{-2\pi L_q n i_q^* + R_s I_d^*}{\beta L_d} \\ \frac{2\pi L_d n(\beta\psi_f + i_d^*) + R_s i_q^*}{\beta L_q} + \end{bmatrix}$。

3 主要结果

3.1 解的存在唯一性

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明:由分步法,当 $t\in[0,\tau]$ 时

$$\begin{cases}\dot{x}(t)+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}\varphi(t-\tau)=-\boldsymbol{B}x(t)-\boldsymbol{C}x(t-\tau)-\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{D}_t^{-\delta}\varphi(t-\tau)+\boldsymbol{F}\\ x(0)=\varphi\end{cases}\tag{12}$$

由引理 1 可知时滞微分方程在 $t\in[0,\tau]$ 上存在唯一解,表示为

$$x_1(t)=\varphi-\int_0^t[\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}\varphi(s-\tau)+\boldsymbol{C}x(s-\tau)+\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{D}_t^{-\delta}\varphi(s-\tau)+\boldsymbol{B}\varphi(0)-\boldsymbol{F}]\mathrm{d}s\tag{13}$$

当 $t\in[\tau,2\tau]$ 时,此方程也存在唯一解,表示为

$$x_2(t)=x_1(\tau)-\int_{\tau}^t[\boldsymbol{A}_{\tau}\boldsymbol{D}_t^{\alpha}x_1(s-\tau)+\boldsymbol{C}x_1(s-\tau)+\boldsymbol{E}_{\tau}\boldsymbol{D}_t^{-\delta}x_1(s-\tau)+\boldsymbol{B}x_1(\tau)-\boldsymbol{F}]\mathrm{d}s\tag{14}$$

以此类推,假设方程在区间 $[(k-1)\tau,k\tau]$,$k\in\mathbf{N}^+$ 上的解为 $x_k(t)$,则根据引理 1,可得 $x(t)$ 在区间 $[k\tau,(k+1)\tau]$ 上有唯一解,为

$$x_{k+1}(t)=x_k(k\tau)-\int_{k\tau}^t[\boldsymbol{A}_{k\tau}\boldsymbol{D}_t^{\alpha}x_k(s-\tau)+\boldsymbol{C}x_k(s-\tau)+\boldsymbol{E}_{k\tau}\boldsymbol{D}_t^{-\delta}x_k(s-\tau)+\boldsymbol{B}x_k(k\tau)-\boldsymbol{F}]\mathrm{d}s\tag{15}$$

即时滞微分方程(12)在区间 $[0,+\infty]$ 上的解存在且唯一,证毕。

3.2　解的指数估计

在方程的解存在且唯一的情况下,推导此类含分数阶微积分的时滞微分方程的解的指数估计。

定理 2:设 $x(t)$ 是时滞微分方程的解,且 n 维列向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in\boldsymbol{C}([0,+\infty))$,$0<\alpha<1$,$0<\delta<1$ 。则方程的解存在且唯一,并且解在 $[0,k\tau]$ 上有以下形式的估计

$$\|x(t)\|\leqslant\|\varphi\|\left[1+\frac{\sigma_a t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e t^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}+\sigma_f t\right]\exp\left[\sigma_{\max}t+\frac{\sigma_a t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e t^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]\quad 0\leqslant t\leqslant k\tau\tag{16}$$

式中,矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{E}$ 的范数取其行列式的最大特征值,矩阵的范数分别记为 σ_a、σ_b、σ_c、σ_e;$\sigma_{\max}=\sigma_c+\sigma_b$,$\|x(t)\|$ 是向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的矩阵范数,$\|\varphi\|=\sup|\varphi(t)|$,$\sigma_f$ 是向量 $\boldsymbol{F}$ 的最大范数。

证明:对式(12)两边进行积分,当 $0\leqslant t\leqslant k\tau$ 时,有

$$x(t)=\varphi-\int_0^t[\boldsymbol{C}x(s-\tau)+\boldsymbol{B}x(k\tau)-\boldsymbol{F}]\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\boldsymbol{A}x(s-\tau)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\int_0^t\frac{\boldsymbol{E}x(s-\tau)}{(t-s)^{-\beta}}\mathrm{d}s\tag{17}$$

则有

$$\|x(t)\|\leqslant\|\varphi\|+\|\boldsymbol{F}\|t+\int_0^t\|\boldsymbol{C}x(s-\tau)+\boldsymbol{B}x(s)\|\mathrm{d}s+\frac{\boldsymbol{A}\|\varphi\|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s+\frac{\boldsymbol{E}\|\varphi\|}{\Gamma(1+\delta)}\int_0^t(t-s)^{\delta}\mathrm{d}s\tag{18}$$

$$\|x(t)\|\leqslant\|\varphi\|+\|\boldsymbol{F}\|t+\frac{\boldsymbol{A}\|\varphi\|}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha}+\frac{\boldsymbol{E}\|\varphi\|}{\Gamma(2+\delta)}t^{1+\delta}+\int_0^t\|\boldsymbol{C}x(s-\tau)+\boldsymbol{B}x(s)\|\mathrm{d}s\tag{19}$$

令 $g(t)=\sup\limits_{-t\leqslant\eta\leqslant 0}|x(t+\eta)|$,则式(19)可化为

$$\|g(t)\|\leqslant\|\varphi\|+\sigma_f t+\frac{\sigma_a\|\varphi\|}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha}+\frac{\sigma_e\|\varphi\|}{\Gamma(2+\delta)}t^{1+\delta}+\sigma_{\max}\int_0^t\|g(s)\|\mathrm{d}s\tag{20}$$

由引理 3 可知

$$\|g(t)\|\leqslant\left\{\|\varphi\|\left[1+\frac{\sigma_a t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e t^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]+\sigma_f t\right\}\exp(\sigma_{\max}t)\tag{21}$$

故当 $0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau$ 时,则有

$$\|g(t)\|\leqslant\left\{\|g(t_0)\|\left[1+\frac{\sigma_a(t-t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e(t-t_0)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]+\sigma_f(t-t_0)\right\}\exp[\sigma_{\max}(t-t_0)]\tag{22}$$

式(21)证明了式(16)在 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 时是成立的。假设当 $t\in[0,k\tau]$ 时,式(22)成立。在式(22)中令 $t_0=t-\tau$,可得

$$\|g(t)\|\leqslant\left\{\|g(t-\tau)\|\left[1+\frac{\sigma_a\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e\tau^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]+\sigma_f\tau\right\}\exp(\sigma_{\max}\tau)\tag{23}$$

当 $t\in[r,(k+1)\tau]$ 时,$t-\tau\in[0,k\tau]$。根据引理 2,将式(16)代入式(23)中,有

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\| g(t) \| \leqslant \left[1+\frac{\sigma_a \tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e \tau^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\| \varphi \| \left[1+\dfrac{\sigma_a (t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\dfrac{\sigma_e (t-\tau)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]\exp\left[\sigma_{\max}(t-\tau)++\dfrac{\sigma_a (t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\dfrac{\sigma_e (t-\tau)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]+ \\ \sigma_f (t-\tau)\exp\left[\sigma_{\max}(t-\tau)+\dfrac{\sigma_a (t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\dfrac{\sigma_e (t-\tau)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]\end{array}\right\}+\sigma_f \tau \exp(\sigma_{\max}\tau)\leqslant$$

$$\| \varphi \| \leqslant \left[1+\frac{\sigma_a \tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e \tau^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]\left[1+\frac{\sigma_a (t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e (t-\tau)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]\exp\left[\sigma_{\max}(t-\tau)++\frac{\sigma_a (t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e (t-\tau)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]+$$

$$\left[1+\frac{\sigma_a \tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e \tau^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]\sigma_f (t-\tau)\exp\left[\sigma_{\max}(t-\tau)+\frac{\sigma_a (t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e (t-\tau)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]+\sigma_f \tau \exp(\sigma_{\max}\tau)\leqslant \| \varphi \| \leqslant$$

$$\left[1+\frac{\sigma_a \tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e \tau^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}+\sigma_f t\right]\exp\left[\sigma_{\max} t++\frac{\sigma_a (t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e (t-\tau)^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}+\frac{\sigma_a \tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e \tau^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]+$$

$$\| \varphi \| \left[1+\frac{\sigma_a t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e t^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}+\sigma_f t\right]\exp\left[\sigma_{\max} t+\frac{\sigma_a t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\sigma_e t^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right] \tag{24}$$

证毕。

下面对一种电流环分数阶 PID 控制进行估计。假设永磁同步电机从瞬时零转速调整时,含转速 n 的相关项即可简化,而且 $\varphi=0$,给出以下形式的电流环时滞分数阶 PID 控制的解的指数估计:$\sigma_a=775K_d$,$\sigma_b=11.67$,$\sigma_c=775K_p$,$\sigma_e=775K_i$,$\sigma_{\max}=\sigma_c+\sigma_b=11.67+775K_p$,$\sigma_f=11.67i_q^*$。$\| x(t) \| \leqslant \| \varphi \| \left[1+\dfrac{775K_d t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\dfrac{775K_i t^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}+11.67i_q^* t\right]\exp\left[(11.67+775K_p)t+\dfrac{775K_d t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\dfrac{775K_i t^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\right]$。

4 结论

在永磁同步电机矢量控制策略中,考虑了含有时滞的电流环的分数阶 PID 控制。其数学模型为一类含分数阶项的时滞微分方程。此类方程具有可解性,其解存在且唯一。给出了此类时滞微分方程解的估计的一般形式,并计算了一种控制条件下的解的指数估计。对此类时滞微分方程的求解具有一定的指导意义。但是在解的指数估计的一般形式中,相关特征值会受控制器的参数、永磁同步电机的转速 n 和给定直交轴电流值 i_d^* 和 i_q^* 影响。另外,分数阶 PID 控制器的参数,永磁同步电机的转速和给定直交轴电流值对解的指数估计的影响趋势,进而如何影响此类时滞微分方程的解的性态,需要做更全面,更深入的研究。

参 考 文 献

[1]Samko S U, Kilbas A A, Marichcv O I. Fractional integrals and Derivatives: Theory and Applications [M]. Amsterdam: Gordon and Breach, 1993.

[2]Podlubny I. Fractional Differential Equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[3]Podlubny I. Fractional-order systems and controllers [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.

[4]Erneux T. Applied Delay Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 2009.

[5]胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展 [J]. 力学进展, 1999, 29(4): 501-512.

[6]王在华, 胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔: 从理论走向应用[J]. 力学进展, 2013, 43(1): 3-20.

[7]张舒, 徐鉴. 时滞耦合系统非线性动力学的研究进展[J]. 力学学报, 2017, 49(3): 565-587.

[8]Lakshmikantham V. Theory of fractional functional differential equations [J]. Nonlinear Anal, 2008, 69: 3337-3343.

[9]蒋威. 退化时滞微分方程[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1992.

[10]Jiang Wei. The constant variation formulae for singular fractional differential systems with delay [J]. Comput. Math, 2010, 59: 1184-1190.

[11]刘可为, 蒋威. 分数阶时滞系统的通解(英文)[J]. 应用数学, 2014, 27(4): 844-850.

[12]Zhang X. Some results of linear fractional order time-delay system[J]. Applied Mathematics & Computation, 2008, 197(1): 407-411.

[13]Mihalo P L, Aleksandar M S. Finite time stability analysis of fractional order time delay system: Gronwall's approach

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[J]. Mathematical and Computer Modelling,2009,49(3): 259-307.

Exponential Estimation of Solutions for a Delay Differential Equations with Fractional-order Calculus

Bao Zhichao, Niu Jiangchuan, Shen Yongjun, Yang Shaopu

(School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: It is of great theoretical significance to study the existence and uniqueness of solutions of fractional differential delay differential equations. For permanent magnet synchronous motor (PMSM) based on current loop fractional-order PID control, a theoretical model of control system with time delay was established, and a class of differential equation with time delay fractional order terms was obtained. The existence, uniqueness, and exponential estimation of solutions of such differential equations were mainly studied. The existence and uniqueness of the solution of this kind of differential equations were proved by using the step-by-step method, and the exponential estimations of the solution of this kind of differential equations were presented by using the generalized Gronwall inequality. It provides a theoretical basis for studying the analytical solutions of such equation.

Key words: time-delay; fractional-order PID control; exponential estimation; permanent magnet synchronous motor

(**上接第** 24 **页**)

Dynamic Influence Analysis of Temporary Steel Bridge with Bailey Beam

Xu Guiman, Han Haiya

(Department of Construction Engineering and Design, Qiannan Polytechnic For Nationalities, Duyun 558000, China)

Abstract: A bailey beam temporary steel bridge with 24 m span is selected as the research object, and a 3D finite element model is established by ANSYS. The method of transient dynamic analysis is adopted. The whole process of vehicle passing the bridge is simulated with the moving load. The influence of different speed and different strengthened measures on the dynamic response of bridge is analyzed. The results show that the strengthening chord can improve the natural frequency of steel bridge, but can't change the vibration mode. The maximum vertical dynamic displacement and vibration acceleration of steel bridge ascend nonlinearly with the increase of speed. Strengthened-chords can enhance bridge stiffness and reduce the amplitude of steel bridge, and also can weaken the influence of vehicle speed on the vibration acceleration of steel bridge. From the point of view of dynamic response of steel bridge, the upper and lower strengthened-cords, upper strengthened-cords, lower strengthened-cord and without strengthened-cords are suggested to use in order. The force and deformation of the inner and outer bailey beams become uneven whether or not to use the strengthen-chords. However, the difference of uneven deformation is small and can be ignored. The strengthened-chords should be installed at the upper and lower side of temporary steel bridge to descend the dynamic deformation. The speed should be less than 50 km/h to descend the dynamic response of steel bridge.

Key words: steel bridge; bailey beam; moving load; strengthened-chord; dynamic analysis

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net