第23卷 第2期 石家庄铁道大学学报(自然科学版) Vol. 23 No. 2
2010年8月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Aug. 2010

# 一类非等截面杆的纵向自由振动

郭树起[1]， 杨绍普[2]

(1. 石家庄铁道大学 工程力学系,河北 石家庄 050043;2. 石家庄铁道大学 机械工程学院,河北 石家庄 050043)

**摘要:** 研究一类变截面杆,其横截面积呈指数函数变化。经适当变换后,杆的纵向自由振动方程转换为退化的超几何方程,其解可以用 Kummer 函数来表示。得到了三种简单边界条件下的频率方程和振型函数。频率方程一般是超越方程,需要数值求解其固有频率。在特殊情形下,可以求得各阶固有频率。

**关键词:** 变截面杆;纵向振动;自由振动;Kummer 函数;超几何方程

**中图分类号:** O326 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-0373(2010)02-0059-05

## 0 引言

杆件作为典型的结构部件广泛应用于生活与工程中。因而其纵向振动和扭转振动受到广泛的重视,在文献中有各种数值研究、解析方法、近似解和精确解[1-2]。部分结构属于典型的变截面杆状结构,如高耸建筑、塔和大展弦比机翼。对等截面杆的纵向振动解容易找到,但关于非等截面杆的研究则很少。研究变截面杆件的纵向振动是从锥形杆开始的。Conway[3]发现锥形杆的固有频率可以用贝塞尔函数来表示。而锥形杆模型可以代替半空间模型用来模拟半空间的动力学行为[4-6],从而为锥形杆的动力学研究注入了新的活力。Lau[7]和 Abrate[8]研究了横截面积为 $A(x)=A_0(x/L)^2$ 和 $A(x)=A_0(1+ax/L)^2$ 时杆的封闭形式的解。Kumar[9]则把其拓展到了 $A(x)=(a+bx)^n$ 和 $A(x)=A_0\sin^2(a+bx)$。LI Q S[10]则把解延拓到杆的密度和杨氏模量也非均匀变化的情况。Anil Raj 和 R. I. Sujith[11]则考虑了横截面积为 $A(x)=kx^n e^{bx^2}$ 和 $A(x)=kx^n e^{bx}$ 的情况。由于求出的频率方程是一般是超越方程,需要进一步用数值方法求出各阶固有频率和主振型。考虑了横截面积为 $A(x)=A_0 e^{ax+bx^2}$ 时变截面杆的纵向振动,采用 Kummer 函数得到了一般情况下的解。在特殊情形下可以直接得到各阶固有频率的值和和主振型的显式表达式。

## 1 控制方程

变截面杆的控制方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x}\right)=\rho A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

式中,$E$ 为杨氏模量;$\rho$ 为密度;$A(x)$ 为杆的横截面积。设分离变量形式的解为

$$u=U(x)g(t) \tag{2}$$

把式(2)代入式(1)则可以得到

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+\omega^2 g=0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{dA(x)/dx}{A(x)}\frac{dU}{dx}+\omega^2\frac{\rho}{E}U=0 \tag{4}$$

式(3)的解显然为

**收稿日期:** 2010-03-17

**作者简介:** 郭树起,男,1972年出生,博士,副教授。研究方向:车辆结构耦合动力学,动力学与控制。主持和主研多项国家自然科学基金和河北省自然科学基金。发表论文15篇,其中被EI收录4篇,SCI收录2篇。

**基金项目:** 国家自然科学基金资助(10602039)

$$g(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t \tag{5}$$

式中,$C_1$、$C_2$ 由初始条件定出。

关键是求出式(4)中的振型函数 $U(x)$。对于变系数微分方程,没有一般的解法,需要对不同的面积变化规律分别求解。本文设截面面积变化规律为指数函数和二次多项式的复合函数。

$$A=A_0\mathrm{e}^{ax+bx^2} \tag{6}$$

并令 $\bar{a}=aL,\bar{b}=bL^2,\bar{x}=x/L,\Omega^2=\omega\frac{\rho L^2}{E},\bar{U}=U/U^*$,其中,$L$ 为杆长,$U^*$ 为某一位移参考值。无量纲化后仍以 $U$、$a$、$b$、$x$ 记之,并把式(6)代入得振型控制方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}+(a+2bx)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}+\Omega^2U=0 \tag{7}$$

考虑三种简单边界条件,两边固定约束(用 $CC$ 表示)、一边固定约束一边自由(用 $CF$ 表示)和两边自由(用 $FF$ 表示),如式(8)所示

$$CC:U(0)=U(1)=0 \tag{8a}$$

$$CF:U(0)=U'(1)=0 \tag{8b}$$

$$FF:U'(0)=U'(1)=0 \tag{8c}$$

令

$$U(x)=c_1U_1(x)+c_2U_2(x) \tag{9}$$

则边界条件式(8)的三式分别化为

$$\begin{pmatrix}U_1(0) & U_2(0)\\ U_1(1) & U_2(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0 \tag{10a}$$

$$\begin{pmatrix}U_1(0) & U_2(0)\\ U_1'(1) & U_2'(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0 \tag{10b}$$

$$\begin{pmatrix}U_1'(0) & U_2'(0)\\ U_1'(1) & U_2'(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0 \tag{10c}$$

以下分 $b=0$ 和 $b\neq 0$ 两种情况叙述。

## 2 $b=0$ 时杆的纵向振动

容易求出,$b=0$ 时式(7)的振型函数 $U(x)$ 为

$$U(x)=c_1\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2-a^2}}{2}x\right)+c_2\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2-a^2}}{2}x\right) \tag{11}$$

此时

$$U_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2-a^2}}{2}x\right) \tag{12a}$$

$$U_2(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2-a^2}}{2}x\right) \tag{12b}$$

### 2.1 两边固定约束

将式(12)其带入(10a)得到固有频率方程

$$\sin\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2-a^2}}{2}\right)=0 \tag{13}$$

所以第 $k$ 阶无量纲固有频率为

$$\Omega_k = \frac{\sqrt{4k^2\pi^2 + a^2}}{2} \tag{14}$$

其最小值是 $\Omega_1 = \dfrac{\sqrt{4\pi^2 + a^2}}{2}$。相应的第 $k$ 阶振型函数为

$$U(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\sin k\pi x \tag{15}$$

即相当于在式(11)中，令 $c_1 = 1, c_2 = 0$，并代入固有频率值。

**2.2　一边固定约束一边自由**

将式(12)代入式(10b)，得到此时相应的固有频率方程为式(16)，是超越方程。

$$\frac{\sqrt{4\Omega^2 - a^2}}{2}\frac{2}{a} = \tan\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2 - a^2}}{2}\right) \tag{16}$$

相应的第 $k$ 阶振型函数为

$$U(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4\Omega_k^2 - a^2}}{2}x\right) \tag{17}$$

**2.3　两边自由**

将式(12)代入式(10c)，得到此时相应的固有频率方程为

$$\begin{pmatrix} \bar{\Omega} & -\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2}\sin\bar{\Omega} - \bar{\Omega}\cos\bar{\Omega} & \dfrac{a}{2}\cos\bar{\Omega} + \bar{\Omega}\sin\bar{\Omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

式中，$\bar{\Omega} = \dfrac{\sqrt{4\Omega^2 - a^2}}{2}$。$c_1$、$c_2$ 有非零解的条件是其系数矩阵的行列式为零。则可以发现其固有频率和两边固定约束相同，如式(14)所示，但是其振型函数不同，将式(14)代入式(18)得 $-\dfrac{a}{2}c_2 + k\pi c_1 = 0$，取 $c_2 = \dfrac{2k\pi}{a}$，则振型函数为

$$U(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2 - a^2}}{2}x\right) + \frac{2k\pi}{a}e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4\Omega^2 - a^2}}{2}x\right) \tag{19}$$

## 3　*b* 不等于零时杆的纵向振动

令 $x = \dfrac{1}{2}\dfrac{-a + 2\sqrt{-zb}}{b}$，式(7)变为退化的超几何方程

$$z\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{2} - z\right)\frac{\partial U(z)}{\partial z} - \frac{\Omega^2}{4b}U(z) = 0 \tag{20}$$

其解可以由 Kummer 函数来表示为

$$U(z) = c_1 w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b}, \frac{1}{2}, z\right) + c_2 w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b}, \frac{1}{2}, z\right) \tag{21}$$

考虑到 $z = -\dfrac{1}{4}\dfrac{(a + 2bx)^2}{b}$，将其代入得到

$$U(x) = c_1 w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\frac{(a + 2bx)^2}{b}\right) + c_2 w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\frac{(a + 2bx)^2}{b}\right) \tag{22}$$

方程(20)的解可以由四类 Kummer 函数来表示。其中任意两类 Kummer 函数线性无关，构成式(20)的通解。选取

$$w_1(\alpha, \beta, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k}\frac{z^k}{k!} \tag{23a}$$

$$w_2(\alpha,\beta,z)=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}w_1(\alpha,\beta,z)+\frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-b}w_1(\alpha-\beta+1,2-\beta,z) \tag{23b}$$

式中,$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$,$(\alpha)_0=1$。

方法类似上一节,可以求得其频率方程和振型。当变截面杆两端固定时,将式(22)代入(8a)得到

$$\begin{pmatrix} w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right) & w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right) \\ w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right) & w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=0 \tag{24}$$

系数矩阵的行列式为零即可得到频率方程。此时固有频率不再能表示为参数 $a$、$b$ 的显示表达式,需要数值求解。

$$w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right)-w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right)w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)=0 \tag{25}$$

其振型函数如式(22)所示,取 $c_1=1$,则 $c_2=-w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)\Big/w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)$当变截面杆的边界条件为一端固定一端自由时,将(22)代入(8b)并利用Kummer函数的求导公式,最后整理得到

$$\begin{pmatrix} w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right) & w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right) \\ -2w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right) & w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=0 \tag{26}$$

令其系数行列式为零,得到频率方程。对具体的参数,需要用数值算法进一步求解固有频率。其振型函数形式上与两端固定时相同的。取 $c_1=1$,则 $c_2=-w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)\Big/w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)$。但其频率方程是不同的,因而实际上并不相同。

同理变截面杆两端自由时,将(22)代入(8c)并利用Kummer函数的求导公式,最后整理得到

$$\begin{pmatrix} w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right) & w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right) \\ w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right) & w_2\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{(a+2b)^2}{b}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=0 \tag{27}$$

令其系数行列式为零,得到频率方程。对具体的参数,需要用数值算法进一步超越方程的根,得到固有频率。再回代式(27)得到具体的振型函数。取 $c_1=1$,则 $c_2=-w_1\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)\Big/w_2\cdot\left(\frac{\Omega^2}{4b}+1,\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\frac{a^2}{b}\right)$。

## 4 结论

采用适当的变换后,变截面杆纵向自由振动微分方程转换为退化的超几何方程,其解可以用Kummer函数来表示。得到了三种简单边界条件下纵向自由振动的频率方程和振型函数。频率方程一般是超越方程,需要数值求解其固有频率。在特殊情形下,可以求得各阶固有频率的显示表达式。

需要说明的是,由于杆的扭转振动和纵向振动的数学形式相同,本方法也适用于扭转振动。

## 参 考 文 献

[1]倪振华.振动力学[M].陕西:西安交通大学出版社,1988.

[2]刘延柱.振动力学[M].北京:高等教育出版社,1998.

[3]CONWAY H D, BECKER E C H,DUBIL F J. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates[J]. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, 1964, 31:329-331.

[4]MEEK J W,WOLF J P. Cone models for homogeneous soil I[J]. Journal of Geotechnical Engineering,1992, 118:667-685.

[5]MEEK J W, WOLF J P. Cone models for soil layer on rigid rock II[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1992, 118:667-685.

[6]MEEK J W,WOLF J P. Why cone models can represent the elastic half space[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1993, 22:759-771.

[7]LAU J H. Vibration frequencies for a non-uniformed beam with end mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, 97:513-521.

[8]ABRATE S. Vibration of non-uniform rods and beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 185:703-716.

[9]KUMAR B M,SUJTH R I. Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniformed rods[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 207:721-729.

[10]LI Q S. Exact solutions for free longitudinal vibrations of non-uniform rods[J]. Journal of Sound and Vibration , 2000, 234(1):1-19.

[11]Anil Raj, Sujith R I. Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods[J]. Journal of Sound and Vibration,2005, 283:1015-1030.

## Free Axial Vibrations of a Non-uniform Rod

**Guo Shuqi**[1], **Yang Shaopu**[2]

(1. Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;
2. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract**: In this paper, the free axial vibrations of a rod with variable cross section are investigated. The area of the cross section of the rod varies exponentially along the axes of the rod. In terms of the proposed transformation, the governing equations of the free vibration are transformed as degenerated hyper-geometry equations, the solutions of which can be expressed by Kummer functions. The frequency equations and mode functions are obtained under three kinds of boundary conditions. Since the frequency equations are transcendental equations, the natural frequencies are solved with a numeric method. For some special cases, the explicit expressions of natural frequencies can be obtained.

**Key words**: rod with variable cross section; axial vibration; free vibrations; Kummer functions; hyper-geometry equation

(上接第 45 页)

## Current Research on Fracture Mechanics of Magneto-electro-elastic Materials

**Feng Wenjie**[1], **Li Yansong**[2]

(1. Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China;
2. Institute of Engineering Mechanics, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract**: Many mechanical researchers have fixed their attentions at the fracture of magneto-electro-elastic material recently. In this paper, the current research on the fracture mechanics of magneto-electro-elastic materials is reviewed. The main topics are composed of anti-plane, plane and penny-shaped crack problems as well as the application of finite element method, boundary element method and meshless method to the fracture of magneto-electro-elastic materials.

**Key words**: magneto-electro-elastic materials; fracture mechanics; meshless method