

考虑车身侧倾的三轴汽车三自由度操纵模型

张伟, 冯国胜, 贾素梅

(石家庄铁道学院 机械工程分院, 河北 石家庄 050043)

摘要:在两轴汽车三自由度操纵模型的基础上,利用拉格朗日方法详细推导出了三轴汽车三自由度操纵模型,该方法同样适用于其它多轴汽车的建模分析。并给出了三轴汽车在已知整车回转角速度的情况下计算各车轮转速的方法。

关键词:三轴汽车;操纵模型;三自由度;侧倾

中图分类号:U46 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-0300(2010)01-0041-06

0 引言

随着载货汽车向大吨位、高车速方向发展,多轴载货汽车不断得到应用^[1]。汽车的操纵稳定性不仅影响到汽车驾驶的操纵方便程度,也是决定高速汽车安全行驶的一个主要性能。在汽车操纵稳定性研究中,常把汽车作为一控制系统,求出汽车曲线行驶的时域响应与频域响应,并以它们来表示汽车的操纵稳定性^[2]。而要想求出汽车的时域响应和频域响应,首先必须建立车辆的操纵模型。在两轴汽车三自由度操纵模型的基础上,利用拉格朗日法详细推导出了三轴汽车三自由度操纵模型。

1 操纵模型假设

在建立三自由度操纵模型之前,假定当汽车沿纵轴线方向行驶速度为一固定值时,忽略汽车的垂直运动和俯仰运动,忽略空气动力的作用,忽略汽车的滚动阻力,限制侧向加速度不超过 $0.4g$,假设地面能够提供足够的纵向附着力,悬架刚度及轮胎侧偏特性均处于线性范围内,忽略转向系统,将输入直接施加于车轮。车辆仅受平衡状态(如直线行驶或稳态转向)附近的小扰动,这意味着前轮输入转角足够小,从而保证车辆的运动方程为线性的。

这时,车辆操纵模型的三个自由度分别为:侧向速度 v 、横摆角速度 r 、车身侧倾角 ϕ 。

推导过程中,假设汽车质心位于前轮与中轮之间,而当汽车质心位于中轮与后轮之间时,只需将 c 代入 $-c$,公式形式均不变化。

2 操纵模型推导过程

图1表示一个在地面惯性坐标系中运动着的车辆。将称为惯性参考基,它包括了由三个单位正交矢量(g_1, g_2, g_3)定义的惯性坐标系 g 。

车辆的每一车轴均具有一个可认为固结于非簧上质量的“侧倾中心”,其定义为车身发生侧倾时,相对于轮胎接地印迹处不发生任何侧向位移的点。车辆前、后侧倾中心的连线被称为“侧倾中心轴”,如图2所示^[3]。再定义一个参考点 O ,为通过簧载质量质心的垂线与侧倾中心轴的交点,如图3所示。将车辆参考坐标系 a 的原点定义在 O 点,将自坐标系原点出发平行于水平面并指向车辆前进方向的轴定义为单位矢量 a_1 。根据右手螺旋法则,侧向单位矢量与垂直单位矢量分别指向车辆右侧和垂直向下,分别定义为 a_2 和 a_3 。将固定于车身的参考基记为 B ,它包括由三个正交单位矢量 b_1, b_2, b_3 定义的坐标系 b ,其中每一矢量与坐标系的各坐标量 a_1, a_2, a_3 的转换关系见表1(其中车身侧倾角 ϕ 为 a_3 与 b_3 的夹角)。

收稿日期:2009-11-23

作者简介:张伟 男 1955年出生 高级工程师

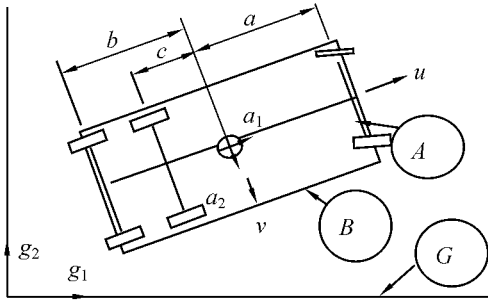


图 1 定义车辆运动的参考基 A 和
接地参考基 G 以及与车身运动的参考基 B

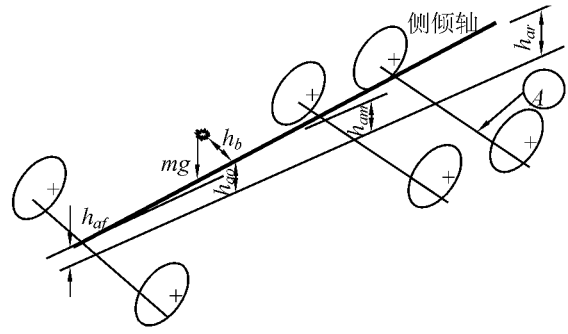


图 2 车身侧倾中心轴

表 1 坐标系 a 和坐标系 b 的转换关系

坐标系	b_1	b_2	b_3
a_1	1	0	0
a_2	0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$
a_3	0	$\sin \phi$	$\cos \phi$

下面采用拉格朗日方法建立考虑车身侧倾的三自由度操纵模型,建模中将整车分为不发生侧倾的非簧载质量和具有侧倾自由度的簧载质量。

根据具有车身侧倾自由度的车辆模型,分别逐项推导其动能、势能和广义力。首先,假设车辆由以下四部分组成:

(1) 具有质量为 m_b 、侧倾转动惯量为 I_{xxb} 、横摆转动惯量为 I_{zzb} 的簧载质量(即车身)。

(2) 具有质量为 m_f 和横摆转动惯量为 I_{zzf} 的前非簧载质量(包括前桥总成和前轮)。

(3) 具有质量为 m_r 和横摆转动惯量为 I_{zzr} 的后非簧载质量(包括后桥总成和后轮)。

(4) 具有质量为 m_m 和横摆转动惯量为 I_{zzm} 的中非簧载质量(包括中桥总成和中轮)。

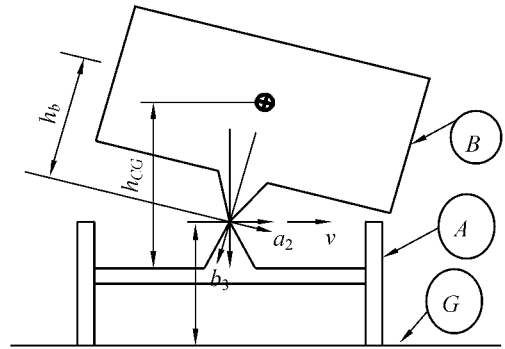


图 3 车身参考基 B、车辆参考基 A 和接地参考基 G 关系

2.1 动能

根据上述介绍的车辆四大组成部分,其总动能可分解为相应的下列四项,即簧载质量(车身)的动能 E_{T_b} 、前非簧载质量(前车轴)动能 E_{T_f} 、后非簧载质量(后车轴)动能 E_{T_r} 和中间非簧载质量(中车轴)动能 E_{T_m} ,这里前、中、后轴的动能的表达式可直接写出,分别为:

(1) 车轴动能。

$$E_{T_f} = \frac{1}{2} m_f (u_f^2 + v_f^2) + \frac{1}{2} I_{zzf} r^2 \quad (1)$$

$$E_{T_m} = \frac{1}{2} m_m (u_m^2 + v_m^2) + \frac{1}{2} I_{zzm} r^2 \quad (2)$$

$$E_{T_r} = \frac{1}{2} m_r (u_r^2 + v_r^2) + \frac{1}{2} I_{zzr} r^2 \quad (3)$$

式中,

$$u_f = u_m = u_r = u \quad (4)$$

$$v_f = v + ar \quad (5)$$

$$v_m = v - cr \quad (6)$$

$$v_r = v - br \quad (7)$$

式中, a 、 b 、 c 分别为汽车质心到前轴、后轴、中轴的距离。 u 为车辆前进速度。

将 u_f, v_f, v_m, v_r 代入动能表达式得

$$E_{T_f} = \frac{1}{2} m_f [u^2 + (v + ar)^2] + \frac{1}{2} I_{zf} r^2 \quad (8)$$

$$E_{T_m} = \frac{1}{2} m_m [u^2 + (v - cr)^2] + \frac{1}{2} I_{zm} r^2 \quad (9)$$

$$E_{T_r} = \frac{1}{2} m_r [u^2 + (v - br)^2] + \frac{1}{2} I_{zr} r^2 \quad (10)$$

(2) 车身动能。由于考虑了车身的侧倾,簧载质量 m_b 的动能 E_{T_b} 分为两部分:车身质量的平动动能和车身质量的转动动能。下面分别进行推导。

车身质量的平动动能:由于车身参考基 B 相对于 A 有一转角,参见图 2、图 3,若以 h_b 表示车身质心至 b_1 轴的距离,则车身质心相对于参考原点 O 的位置矢量 P 为

$$P = -h_b b_3 = h_b \sin \phi a_2 - h_b \cos \phi a_3 \quad (11)$$

考虑到车辆航向角 ψ (即基 A 相对于基 G 的转角),则 P 在地面参考基 G 中的速度矢量则为

$$\frac{dP^G}{dt} = \frac{dP^B}{dt} + \Omega^{GB} \times P \quad (12)$$

式中,

$$\Omega^{GB} = \Omega^{GA} + \Omega^{AB} = \psi a_3 + \phi b_1 \quad (13)$$

因为这里 $dP^B/dt = 0$,根据表 1,并结合参考原点 O 的速度 ($ua_1 + va_2$),则(12)可写为

$$\frac{dP^G}{dt} = u_b a_1 = v_b a_2 = w_b a_3 \quad (14)$$

式中, u_b 为车身前进速度; v_b 为车身侧向速度; w_b 为车身垂向运动速度。且表达式分别为

$$u_b = u - h_b \psi \sin \phi \quad (15)$$

$$v_b = v + h_b \phi \cos \phi \quad (16)$$

$$w_b = h_b \phi \sin \phi \quad (17)$$

若将车身质量的平动动能记为 $E_{T_{b-t}}$,则有

$$E_{T_{b-t}} = \frac{1}{2} m_b (u_b^2 + v_b^2 + w_b^2)$$

因为 $\psi = r(\psi$ 为航向角) 所以

$$\begin{aligned} E_{T_{b-t}} &= \frac{1}{2} m_b [(u - h_b \psi \sin \phi)^2 + (v + h_b \phi \cos \phi)^2 + (h_b \phi \sin \phi)^2] = \\ &= \frac{1}{2} m_b [(u - h_b r \sin \phi)^2 + (v + h_b \phi \cos \phi)^2 + (h_b \phi \sin \phi)^2]。 \end{aligned}$$

车身质量的转动动能

$$E_{T_{b-r}} = \frac{1}{2} (\Omega^{GB})^T I_b \Omega^{GB} \quad (18)$$

式中, I_b 是车身质量的转动惯量阵。在参考基 B 中, I_b 为一常量矩阵,且

$$I_b = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (19)$$

式中, I_{ii} 分别表示通过车身质心关于矢量 b_i 的转动惯量; I_{ij} 为惯性积。对大多数车辆而言,由于车辆对其中心线的对称性,所以近似有 $I_{12} = I_{23} = 0$ 。由于矩阵 I_b 在参考基 B 中恒定,因而根据式(13), Ω^{GB} 在参考基 B 内的表达式为

$$\Omega^{GB} = \phi b_1 + \psi \sin \phi b_2 + \psi \cos \phi b_3 \quad (20)$$

结合式(18) ~ 式(20),得到车身的转动动能为

$$E_{T_{b-r}} = \frac{1}{2}(I_{11}\dot{\phi}^2 - 2I_{13}\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\phi + I_{33}\dot{\psi}^2\cos^2\phi + I_{22}\dot{\psi}^2\sin^2\phi) \quad (21)$$

上式主要取决于第一项和第三项,即侧倾转动惯量项和横摆转动惯量项,且两项均为二阶项。虽然第二项(侧倾于横摆的惯性积项)也为二阶项,但它与侧倾转动惯量和横摆转动惯量相比相对较小,因此通常可忽略。而第四项为四阶项(因为当 ϕ 较小时,近似有 $\sin\phi \approx \phi$),因此此项也可忽略不计。

最后车身的转动动能为

$$E_{T_{b-r}} = \frac{1}{2}(I_{11}\dot{\phi}^2 + I_{33}\dot{\psi}^2 + \cos^2\phi) = \frac{1}{2}(I_{xxb}\dot{\phi}^2 + I_{zxb}r^2\cos^2\phi) \quad (22)$$

2.2 势能和耗散能

若假定车身侧倾时,悬架仍表现为线性特性,那么悬架的侧倾刚度系数 K_ϕ 和侧倾阻尼系数 C_ϕ 则均为常量^[4-5]。若在线性假定条件下,车身相应的势能和耗散能分别为:

(1) 势能。

$$E_v = \frac{1}{2}K_\phi\phi^2 - m_bgh_b(1 - \cos\phi) \quad (23)$$

其中, $-m_bgh_b(1 - \cos\phi)$ 为由于车辆侧倾时车身质心高度下降所产生的势能变化。

(2) 耗散能。

$$E_D = \frac{1}{2}C_\phi\dot{\phi}^2 \quad (24)$$

2.3 广义力

Q_v 、 Q_r 、 Q_ϕ 分别为车辆侧向力、横摆转矩和侧倾转矩的广义力,即

$$Q_v = F_{yf} + F_{ym} + F_{yr} \quad (25)$$

$$Q_r = aF_{yf} - bF_{yr} - cF_{ym} \quad (26)$$

$$Q_\phi = d_fF_{yf} + d_rF_{yr} + d_mF_{ym} \quad (27)$$

式中, $d_f = h_{af} - h_{ao}$; $d_r = h_{ar} - h_{ao}$; $d_m = h_{am} - h_{ao}$ 。式中, h_a 为某车轴侧倾中心高度; h_{ao} 为参考坐标系原点高度。 F_{yf} 、 F_{yr} 、 F_{ym} 分别为车辆前轴、后轴、中轴的侧向力,它们的计算表达式为: $F_{yf} = -C_{af}\alpha_f$; $F_{ym} = -C_{am}\alpha_m$; $F_{yr} = -C_{ar}\alpha_r$ 。其中, C_{af} 、 C_{am} 、 C_{ar} 分别为前、中、后轴的侧偏刚度, α_f 、 α_m 、 α_r 分别为前、中、后轴的侧偏角。

$$\alpha_f = \frac{v + ar}{u} - \delta_f \quad (28)$$

$$\alpha_m = \frac{v - cr}{u} \quad (29)$$

$$\alpha_r = \frac{v - br}{u} \quad (30)$$

采用拉格朗日方程的特殊形式如下: $q_1 = v$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_T}{\partial v}\right) + r\frac{\partial E_T}{\partial u} = Q_v$; $q_2 = r$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_T}{\partial r}\right) + u\frac{\partial E_T}{\partial v} - v\frac{\partial E_T}{\partial u} =$

$$Q_r; q_3 = \phi, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_T}{\partial \phi}\right) - \frac{\partial E_T}{\partial \phi} + \frac{\partial E_v}{\partial \phi} + \frac{\partial E_D}{\partial \phi} = Q_\phi。$$

将动能、势能、耗散能和广义力分别代入以上微分方程,可分别导出侧向速度 v 、横摆角速度 r 和车身侧倾角 ϕ 的三个微分方程如下:

$$\begin{aligned} & (m_b + m_f + m_m + m_r)(\dot{v} + ur) + (am_f - bm_r - cm_m)\dot{r} + m_bh_b\ddot{\phi} = - \\ & \left[C_{af}\left(\frac{v + ar}{u} - \delta_f\right) + C_{am}\frac{v - cr}{u} + C_{ar}\frac{v - br}{u} \right]; I_{xx}\ddot{\phi} + C_\phi\dot{\phi} + (K_\phi - m_bgh_b)\phi + m_bh_b(\dot{v} + ur) = -d_fC_{af} \cdot \\ & \left(\frac{v + ar}{u} - \delta_f\right) - d_mC_{am}\frac{v - cr}{u} - d_rC_{ar}\frac{v - br}{u}, \text{其中}, I_{xx} = I_{xxb} + m_bh_b^2; I_{zz} = I_{zxb} + I_{zxf} + I_{zxr} + I_{zzm} + m_fa^2 + m_ra^2 + m_rb^2 + \\ & m_m c^2。把上面三个方程写成矩阵的形式如下 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & m_b h_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{r} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & am_f - bm_r - cm_m & 0 \\ am_f - bm_r - cm_m & I_{zz} & 0 \\ m_b h_b & 0 & C_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_{af} + C_{ar} + C_{am}}{u} & \frac{mu + \frac{aC_{af} - bC_{ar} - cC_{am}}{u}}{u} & 0 \\ \frac{aC_{af} - bC_{ar} - cC_{am}}{u} & \frac{a^2 C_{af} + b^2 C_{ar} + c^2 C_{am}}{u} + (am_f - bm_r - cm_m)u & 0 \\ \frac{d_f C_{af} + d_r C_{ar} + d_m C_{am}}{u} & \frac{ad_f C_{af} - bd_r C_{ar} - cd_m C_{am}}{u} + m_b h_b u & K_\phi - m_b g h_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{af} \\ aC_{af} \\ d_f C_{af} \end{pmatrix} (\delta_f), \text{ 其中,}$$

m 为汽车总质量, $m = m_f + m_r + m_m + m_b$; C_ϕ 为侧倾阻尼系数; K_ϕ 为侧倾刚度系数; δ_f 为前轮输入角。

3 三轴汽车各车轮转速的计算

设车辆的轮距为 B , β 为车辆瞬心 O 的侧偏角, ω 为整车回转角速度, 直线 AB 垂直于 BC , $OB = x$, $AO = R_o$, $AC = R_f$, 如图4所示。

$AB = l$ 则 $\tan \beta = \frac{v}{u}$, 可得 $\beta = \arctan \frac{v}{u}$ 。对于三角形 AOC 应用余弦定理可得

$$\cos(90^\circ + \beta) = \frac{a + R_o - R_f}{2R_o a} \quad (31)$$

根据几何和速度关系又可得

$$\omega R_o = \sqrt{(u^2 + v^2)} \quad (32)$$

$$\omega R_f = \sqrt{u^2 + (v + ar)^2} \quad (33)$$

联立式(31)、(32)、(33)可解得 ω 、 R_o 、 R_f 。由几何关系可知 $\angle BAO = \beta$, 根据直角三角形 ABO 可知 $l = R_o \cos \beta$; $x = R_o \sin \beta$ 。于是, $V_{11} = \omega \sqrt{(l - B/2)^2 + (x + a)^2}$; $V_{12} = \omega \sqrt{(l + B/2)^2 + (x + a)^2}$; $V_{21} = \omega \sqrt{(l - B/2)^2 - (x + c)^2}$; $V_{22} = \omega \sqrt{(l + B/2)^2 + (x - c)^2}$; $V_{31} = \omega \sqrt{(l - B/2)^2 + (b - x)^2}$; $V_{32} = \omega \sqrt{(l + B/2)^2 + (b - x)^2}$ 。

设 n 为车轮转速, 车轮半径为 R ,

则

$$n = \frac{30V}{\pi R} \quad (34)$$

由式(34)得各个车轮的转速为 $n_{11} = \frac{30V_{11}}{\pi R}$; $n_{12} = \frac{30V_{12}}{\pi R}$; $n_{21} = \frac{30V_{21}}{\pi R}$; $n_{22} = \frac{30V_{22}}{\pi R}$; $n_{31} = \frac{30V_{31}}{\pi R}$; $n_{32} = \frac{30V_{32}}{\pi R}$ 。

4 结束语

从理论上推导了考虑车身侧倾的三自由度三轴汽车的运动微分方程, 在此基础上可对车辆的操纵稳定性进行分析。在此没有考虑轮胎的左右载荷转移等因素的影响, 这有待进一步的分析与研究。

参 考 文 献

- [1] 屈求真, 刘延柱. 三轴汽车前后轮角输入时的响应分析[J]. 汽车工程, 1999, 21(1): 26-30.
- [2] 余志生. 汽车理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003: 103-105.
- [3] 喻凡, 林逸. 汽车系统动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 211-240.
- [4] 郭孔辉. 汽车操纵动力学[M]. 吉林: 吉林科学出版社, 1991: 195-196.
- [5] 管西强, 屈求真, 张建树. 三轴汽车前后轮转向时的侧向动力学控制[J]. 机械科学与技术, 2002, 21(1): 69-71.

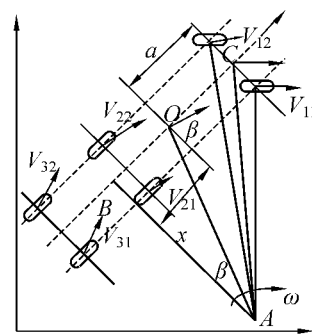


图4 三轴汽车简化模型

Three DOF Operating Model of Three-Axle Vehicle Considering Body Roll

Zhang Wei, Feng Guosheng, Jia Sumei

(School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: The operating model of three DOFs for three-axle vehicle is derived in detail in this paper based on the operating model of two DOFs for three-axle using the method of Lagrange. The method also applies to other multi-axle vehicles. The method of calculating the rotate speed of every wheel is given for the three-axle vehicle with the vehicle palstance known.

Key words: three axle vehicle; operating model; three degrees of freedom; heeling

(上接第 10 页)

- [8] Janssens M H A, Dittrich M G, F G de. Beer, et al. Railway noise measurement method for pass-by noise, total effective roughness, transfer functions and track spatial decay [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 293: 1007-1028.
- [9] Janssens M H A, Jansen H W, Dittrich M G. Evaluation of the interim measurement protocol for railway noise source description [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 293: 1029-1040.
- [10] 王济, 胡晓. MATLAB 在振动信号处理中的应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2006.
- [11] Technical Committee CEN/TC256. ISO3095:2005 Railway applications-acoustics-measurement of noise emitted by railbound vehicles[S]. Switzerland: [s. n.], 2005.

Measurement and Analysis of Wheel Surface Short Wavelength Irregularity of Rail Transit Vehicle

Cheng Xiaoping, Lian Songliang, Chen Minmin

(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Short wavelength irregularity of wheel/rail surface is the main reason of vibration and noise of railway alongside vicinity. Therefore, measuring the short wavelength irregularity of wheel/rail surface accurately and efficiently has a profound influence on prediction, assessment and source-controlling of vibration and noise. Based on the field-measured wheel surface roughness data of trains running in Line 2 of Shanghai Urban Rail Transit, such methods as statistics analysis combined with one-third octave analysis and PSD analysis have been employed in this paper. Through this research, the below conclusions are drawn: In time domain, the peak value of most wheels' roughness range from $3\mu\text{m}$ to $13\mu\text{m}$. In frequency domain, when the wavelength of irregularity exceeds 4.0 cm, the one-third octave value is much smaller than the ISO3095 standard, which means the wheel surface is rather smooth; however, when the wavelength is below 2.5 cm, the one-third octave value exceeds the standard. The main wavelengths which devote most to the PSD range from 57.7 cm to 95.2 cm. Especially, most of them are in the range from 70 cm to 80 cm, averaged 72.1 cm.

Key words: wheel surface; short wavelength irregularity; DRM; IDRM; Pits; Spikes